D 15

Zum allgemeinen Kreisnormierungsprinzip der konformen Abbildung

Von

JAROSLAW TAGAMLIZKI
aus Armawir

S. HIRZEL / LEIPZIG 1943

Meinen Eltern

und meiner Schwester

ABDRUCK
AUS DEN BERICHTEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE DER SÄCHSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG
XCV. BAND
SITZUNG VOM 7. JUNI 1943

Zum allgemeinen Kreisnormierungsprinzip der konformen Abbildung[1])

Von

Jaroslaw Tagamlizki (aus Sofia z. Z. in Leipzig)

Vorgelegt von Herrn Koebe

I. Einleitung 111
II. Problemstellung 113
III. Hilfssätze 115
IV. Entarteter Fall 120
Existenzbeweis 120
Unitätsbeweis 122
V. Nicht entarteter Fall 123
Existenzbeweis 123
Unitätsbeweis 126
Beispiel 129
VI. Schlußbemerkungen 129
VII. Literaturverzeichnis 131

Hinweise auf das Literaturverzeichnis sind im Text oft nur durch Nummernangabe gemacht.

I. Einleitung

Bekanntlich kann ein einfach zusammenhängendes Gebiet[2]) auf ein Kreisgebiet abgebildet werden. (Kreisnormierungsprinzip für einfach zusammenhängende Gebiete.) Die vollständige Begründung des Kreisnormierungsprinzipes[3]) für Gebiete endlichen Zusammenhanges ist von Herrn Prof. Koebe durchgeführt worden. Die allgemeine Lösung der Aufgabe für unendlich-vielfach zusammenhängende Gebiete ist als Desideratum von Herrn Koebe gestellt worden (allgemeines Kreisnormierungsprinzip). Die Behandlung dieses Problems in der vollen Allgemeinheit bietet jedoch

1) D 15.

2) „Gebiet" soll heißen, daß nur die inneren Punkte in Betracht kommen.

3) Damit ist der Satz gemeint, daß ein gegebenes schlichtes Gebiet eineindeutig auf ein Gebiet abgebildet werden kann, welches nur von Vollkreisen begrenzt ist (Kreisgebiet). Jeder einzelne Kreis darf sich auch auf einen Punkt reduzieren.

außerordentliche Schwierigkeiten dar, die bis heute noch nicht überwunden sind; dagegen wurde das analoge Problem der Abbildung auf Schlitzbereiche von Koebe auch für Bereiche unendlich hohen Zusammenhanges vollständig gelöst (10 u. 24)[1]. Es ist zwar durch Anwendung des Häufungsprinzipes der analytischen Funktionen leicht, die isolierten Begrenzungskomponenten des abzubildenden Gebietes in Kreise zu verwandeln (— man verwandelt zuerst die erste Begrenzungskomponente in einen Kreis, dann die ersten zwei usw.; auf die so gewonnene Folge von Abbildungen wendet man das Häufungsprinzip an. Zur näheren Begründung sei der Leser noch an gewisse spätere Bemerkungen, S. 124, verwiesen). Aber es gelingt im allgemeinen nicht, Näheres über die Häufungskomponenten zu gewinnen. Noch nicht überwundene Schwierigkeiten sind auch mit dem Unitätssatz verbunden. Herr Prof. Koebe hat mir gegenüber die Meinung ausgesprochen, daß vielleicht metrische Bedingungen irgendwelcher Art zur Präzisierung des Begriffes des allgemeinen Kreisgebietes notwendig sein könnten, um das Prinzip für Gebiete unendlich hohen Zusammenhanges insonderheit hinsichtlich des Unitätssatzes allgemein zu sichern[2]. Jedenfalls haben sich bei dem allgemeinen Parallelschlitztheorem solche Bedingungen als notwendig herausgestellt.

Nun einiges Nähere zur Geschichte dieses Problems.

Die Frage der konformen Abbildung von beliebigen Gebieten unendlich hohen Zusammenhanges auf Kreisgebiete wurde zuerst von Herrn Prof. Koebe gestellt. Das Problem hat sich folgendermaßen entwickelt. Mit Hilfe verschiedener Methoden (Methode der Überlagerungsfläche (7), iterierendes Verfahren, bzw. Iterationsmethode (7), Kontinuitätsmethode (19)) hat Koebe die Begründung des Kreisnormierungsprinzipes für Gebiete endlichen Zusammenhanges (Existenzsatz und Unitätssatz) durchgeführt. Im Jahre 1908 hat er zum erstenmal das allgemeine Kreisnormierungsprinzip ausgesprochen (Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, dritte Mitteilung, Gött. Nachr. 1908). In derselben Arbeit zeigt er einen Weg zur Behandlung des Kreisnormierungsprinzipes für symmetrische Gebiete unendlich hohen Zusammenhanges, deren sämtliche Begrenzungslinien die Achse des Reellen schneiden. Später hat A. Fischer den Koebeschen Gedanken ausgeführt (Diss. Jena, 1915). Ebenfalls auf Anregung von Koebe sind die Arbeiten von K. Georgi (Diss. Jena, 1915) und H. Denneberg (Diss. Leipzig, 1932) entstanden. In diesen Arbeiten handelt es sich um Gebiete, die eine einzige, und zwar punktförmige Häufungskomponente

1) Siehe auch Gött. Nachr. 1909 S. 324ff., ebenda 1910 S. 59ff.

2) Vgl. 8 S. 189.

besitzen, wobei bezüglich der isolierten Begrenzungen gewisse Distanzierungsbedingungen eingeführt werden. In gleicher Richtung bewegt sich eine Arbeit von Grötzsch, der endlich viele „vollkommen punktförmige" Komponenten einführt (23). Im Jahre 1922 hat Koebe seinerseits das Kreisnormierungsprinzip für die erwähnten symmetrischen Gebiete unendlich hohen Zusammenhanges (Iterationsmethode) nochmals bewiesen.

In unserer Arbeit wird ein neuer Schritt gemacht, indem der Begriff einer starken Sperre eingeführt wird. Im Falle von Denneberg (s. das Beispiel im Kapitel „Problemstellung"), Georgi und Grötzsch existiert, wie leicht zu erkennen ist, immer eine starke Sperre[1]). Unser Begriff der starken Sperre gestattet aber das Kreisnormierungsprinzip zu begründen auch in wesentlich neuen Fällen. Wir wollen besonders betonen, daß auch der Fall behandelt ist, bei welchem eine nicht punktförmige Häufungskomponente auftritt. Dabei wird sowohl der Existenzsatz wie auch der Unitätssatz bewiesen. Eine wesentliche Rolle spielen in unserer Arbeit die von Koebe in „Uniformisierung der algebraischen Kurven" II und III entwickelten Methoden (Koebescher Verzerrungssatz usw.).

II. Problemstellung

Es sei

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

eine Folge von in der durch den unendlich fernen Punkt abgeschlossenen funktionentheoretischen Ebene liegenden, isolierten Punkten. Wir bilden um jeden Punkt dieser Folge eine Jordansche Kurve l_n, und zwar in folgender Weise: wenn a_n im Endlichen liegt, so ist a_n der einzige Punkt der Folge, der sich im Inneren von l_n befindet. Wenn a_n im Unendlichen liegt, wird dieselbe Voraussetzung für das Äußere von l_n gemacht. Um die Fallunterscheidung zu vermeiden, werden wir im Falle, daß a_n im Unendlichen liegt, das Äußere von l_n als sein relatives Innere bezeichnen[2]). Alle anderen Kurven

$$l_1, l_2, \ldots l_{n-1}, l_{n+1}, \ldots$$

sollen im relativen Sinne außerhalb l_n liegen.

Sei G ein unendlich-vielfach zusammenhängendes Gebiet unserer geschossenen Ebene, dessen isolierte Begrenzungskomponenten durch die erwähnten Linien l_n getrennt und dessen Häufungskomponenten durch die

1) Das sind die uns bekannten unsymmetrischen Fälle.

2) Wenn a_n im Endlichen liegt, so bedeutet das relative Innere von l_n dasselbe wie das Innere im gewöhnlichen Sinne.

Gesamtheit der Häufungspunkte der a_n gebildet werden. Der Ausdruck „getrennt" soll andeuten, daß im relativen Inneren von l_n höchstens eine Begrenzungskomponente von G liegen soll. Es darf also vorkommen, daß in manchen l_n (allerdings im relativen Sinne) keine Begrenzungskomponente liegt. Von einem solchen Gebiet werden wir sagen, daß es durch das Kurvensystem

$$l_1, l_2, l_3, \ldots$$

gesperrt ist.

Wenn es möglich ist, jedes von dem Kurvensystem l_n gesperrte Gebiet G auf ein Kreisgebiet eindeutig konform abzubilden und wenn diese Abbildung bis auf eine lineare Transformation eindeutig bestimmt ist, werden wir sagen, daß das erwähnte Kurvensystem eine zu den Punkten a_n gehörige starke Sperre bildet.

Beispiel: Wir wollen ein Beispiel einer starken Sperre bringen. Dabei werden wir die Kenntnis der Dennebergschen Arbeit voraussetzen. Es sei

$$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$$

eine Folge von endlichen zweifach zusammenhängenden Gebieten (Ringen), die sich gegenseitig ausschließen, d. h. Δ_n liegt außerhalb der äußeren Begrenzung von jedem anderen Ring

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_{n-1}, \Delta_{n+1}, \ldots$$

Die Ringe sollen sich nur im Unendlichen häufen. Weiter wird vorausgesetzt, daß es unter den Δ_n nur endlich viele inkongruente gibt. Wir wollen zeigen, daß die inneren Begrenzungskomponenten λ_n von Δ_n eine starke Sperre bilden. In diesem Fall spielen die Punkte a_n keine wesentliche Rolle. Sie können irgendwie innerhalb λ_n gewählt werden.

Es sei G ein vom Kurvensystem der λ_n gesperrtes Gebiet. Die isolierten Begrenzungskomponenten von G können weder beliebig groß werden noch beliebig nah zueinander kommen, also sind die Dennebergschen Voraussetzungen erfüllt. Dementsprechend kann G auf eine und nur eine Weise auf ein Kreisgebiet abgebildet werden. Die λ_n bilden somit in der Tat eine starke Sperre. Wir wollen noch zeigen[1]), daß auch umgekehrt jedes den Dennebergschen Bedingungen genügende Gebiet G durch ein solches Ringsystem Δ_n gesperrt werden kann. Ein Dennebergsches Gebiet ist ein unendlich vielfach zusammenhängendes Gebiet, das den unendlich fernen

1) Im wesentlichen nach Denneberg.

Punkt als einzige Häufungsrandkomponente hat, dessen endliche Randkomponenten weder beliebig nah zueinander kommen, noch beliebig groß werden können. Um den erwähnten Nachweis zu führen, bilden wir ein Netz von kongruenten Dreiecken, die die ganze Ebene schlicht und lückenlos bedecken. Jede isolierte Begrenzungskomponente g_n kann mit endlich vielen solchen Dreiecken bedeckt werden. Bei variabilen n bleibt ihre Anzahl beschränkt, wenn man nicht zu viel unnötige Dreiecke heranzieht. Die Dreiecke können so klein gewählt werden, daß es möglich wird, die Ringe Δ_n aus den herangezogenen Dreiecken allein aufzubauen. Somit gibt es nur endlich viel wesentlich verschiedene, d. h. inkongruente Ringe Δ_n.

Es gibt nun aber auch schon, wenn die a_n sich nur im Unendlichen häufen, solche Verteilungsmöglichkeiten für die Punkte a_n, bei denen es unmöglich ist, eine starke Sperre Dennebergscher Art anzugeben, nämlich immer dann, wenn die a_n einander beliebig nahe kommen können.

Das Ziel unserer Arbeit ist die Existenz einer starken Sperre zu beweisen, wenn die Punkte a_n beliebig gegeben sind, unter der einzigen Voraussetzung, daß die a_n innerhalb eines einfach zusammenhängenden Gebietes liegen, dessen Begrenzung von den Häufungspunkten der a_n gebildet ist. Der Fall, wo die Punkte a_n nur einen Häufungspunkt besitzen, ist der einfachste Spezialfall. In unserer Arbeit ist dieser Fall als entartet bezeichnet.

Die weiteren Darlegungen der Arbeit zerfallen in drei Teile. Im ersten Teil sind die notwendigen Hilfssätze bewiesen. Im zweiten Teil wird der Fall untersucht, wo die Folge

$$a_1, a_2, \ldots$$

nur einen Häufungspunkt (entarteter Fall) besitzt. Im dritten Teil wird der Fall behandelt, bei welchem die Häufungspunkte der a_n den Einheitskreis bilden. Der allgemeine (nicht entartete) Fall wird auf den vorbenannten Fall durch eine konforme Abbildung zurückgeführt.

III. Hilfssätze

Es sei B ein beliebiges allgemein zu reden unendlich-vielfach zusammenhängendes schlichtes Gebiet, das den unendlich fernen Punkt in seinem Inneren enthalten kann oder nicht. Eine für das Innere von B erklärte Abbildung auf ein analoges Gebiet $\bar{B}$ nennen wir „affin" unter folgenden Bedingungen:

1. enthält B den unendlich fernen Punkt, so soll auch $\bar{B}$ ihn enthalten, und es sollen sich die unendlich fernen Punkte entsprechen;

2. enthält B den unendlich fernen Punkt nicht, so soll auch $\bar{B}$ ihn nicht enthalten. Die beiden Bereiche B und $\bar{B}$ haben dann je eine äußere Randkomponente. Diese beiden Randkomponenten sollen bei der Abbildung im Sinne der Annäherung von innen her einander entsprechen.

Mit $H(B)$ bezeichnen wir die Familie der im genannten Sinne „affinen" konformen Abbildungen von B, die in allen Teilgebieten[1])

$$B.\,(|z| < R)$$

dem absoluten Betrage nach unterhalb einer nur von R abhängigen oberen Schranke

$$M(R)$$

bleiben. Die Familie $H(B)$ ist somit erst dann bestimmt, wenn die Funktion $M(R)$ gegeben ist.

Diese Funktion $M(R)$ wird bei unseren nachfolgenden Entwicklungen nur auf zwei Arten wirklich vorkommen: im Falle 1, wo also die Unendlichpunkte sich entsprechen, ist das Vorhandensein einer $M(R)$ unmittelbar nach einem Koebeschen Schänkungssatz garantiert durch die Normierung $z + ((0))$ im Unendlichen. Im Falle 2 werden wir einfach mit beschränkten Abbildungen zu tun haben.

Sei a ein im Inneren von B liegender Punkt und

$$|z - a| \leqq r$$

eine Kreisscheibe. Der Radius r ist so klein zu wählen, daß die Kreisscheibe ganz im Inneren von B liegt. Wir bezeichnen mit

$$D(r, a)$$

die obere Grenze der Schwankungen der Funktionen der Familie

$$H\left[B.\left(|z - a| > \frac{r}{m}\right)\right], \qquad m > 1$$

(allerdings bei gegebenem $M(R)$) auf dem Kreise

$$|z - a| = r.$$

Offenbar ist $D(r, a)$ endlich. Wir werden eine Abschätzung für

$$D\left(\frac{r}{m^n}, a\right)$$

auf Grund des folgenden Hilfssatzes 1 finden.

---

1) $B.\,(|z| < R)$ bedeutet den Durchschnitt der beiden Gebiete.

Hilfssatz 1. Betrachten wir die Familie der Funktionen $f(z)$, die im Ringe

$$r_1 \leqq |z-a| \leqq r_2 \qquad r_2 > r_1$$

regulär, eindeutig, schlicht und „affin" sind. Wir bezeichnen mit $\sigma_f(r, a)$ die Schwankung der Funktion $f(z)$ auf dem Kreise

$$|z-a| = r \qquad r_1 \leqq r \leqq r_2$$

Es wird behauptet, daß es eine von der Funktion $f(z)$ und natürlich von dem Punkt a unabhängige Konstante Q gibt, die größer als eins ist und der Ungleichung

$$\sigma_f(r_2, a) \geqq Q\, \sigma_f(r_1, a)$$

genügt.

Beweis. Wir werden zunächst die Existenz der Konstante Q für einen verkleinerten Ring

$$\varrho_1 \leqq |z-a| \leqq \varrho_2 \qquad r_1 < \varrho_1 < \varrho_2 < r_2$$

nachweisen.

Es ist klar, daß

$$\frac{\sigma_f(\varrho_2, a)}{\sigma_f(\varrho_1, a)} > 1$$

ist; denn $f(z)$ ist affin, und es gilt

$$\varrho_2 > \varrho_1.$$

Angenommen die Behauptung wäre falsch, so gäbe es eine Folge (vgl. 3 S. 117) von Funktionen

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots$$

die unseren Bedingungen genügen und für welche die Folge

$$\frac{\sigma_{f_1}(\varrho_2, a)}{\sigma_{f_1}(\varrho_1, a)},\ \frac{\sigma_{f_2}(\varrho_2, a)}{\sigma_{f_2}(\varrho_1, a)},\ \frac{\sigma_{f_3}(\varrho_2, a)}{\sigma_{f_3}(\varrho_1, a)},\ \ldots$$

gegen eins konvergiert.

Die Quotienten werden aber offenbar nicht geändert, wenn wir die Funktionen der Folge in einem Punkte des Ringes vermöge ganzer linearer Transformationen normieren, indem wir den Funktionswert und den Wert der ersten Ableitung in diesem Punkt vorschreiben. Für die normierte Folge behalten wir dieselbe Bezeichnung. Es läßt sich nur auf Grund des Koebeschen Verzerrungssatzes eine im Ringe

$$\varrho_1 \leqq |z-a| \leqq \varrho_2$$

gleichmäßig konvergente Folge auswählen. Die Häufungsfunktion bezeichnen wir mit $\varphi(z)$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz folgt,

daß
$$\frac{\sigma_\varphi(\varrho_2, a)}{\sigma_\varphi(\varrho_1, a)} = 1$$
ist, was unmöglich ist, da $\varphi(z)$ regulär eindeutig, schlicht und wegen der Normierung keine Konstante ist. Damit ist die Existenz von $Q > 1$ mit der Eigenschaft
$$\sigma_f(\varrho_2, a) \geqq Q\sigma_f(\varrho_1, a)$$
und seine Unabhängigkeit von der Funktion $f(z)$ gezeigt. Wegen der „Affinität" der Abbildung gilt dann um so mehr
$$\sigma_f(r_2, a) \geqq Q\sigma_f(r_1, a).$$

Wir wenden jetzt das Vorhergehende an auf eine Teilfolge ineinander geschachtelten Ringe (vgl. 9, S. 56)
$$r \geqq |z-a| \geqq \frac{r}{m}$$
$$\frac{r}{m} \geqq |z-a| \geqq \frac{r}{m^2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{r}{m^{n-1}} \geqq |z-a| \geqq \frac{r}{m^n}$$
und beziehen uns auf Funktionen $f(z)$, die im Ringe
$$r \geqq |z-a| \geqq \frac{r}{m^n}$$
erklärt sind. Dann besteht für diese Ringe ein einheitliches Q. Wir finden durch sukzessive Anwendung des Hilfssatzes 1
$$\sigma_f(r, a) \geqq Q^n \sigma_f\left(\frac{r}{m^n}, a\right).$$

Nun gehöre $f(z)$ zu
$$H\left[B.\left(|z-a| \geqq \frac{r}{m^n}\right)\right].$$
Hier ist der Radius r so klein gewählt zu denken, daß die Kreisfläche
$$|z-a| \leqq r$$
im Inneren von B liegt. Da $\sigma_f(r, a)$ eine von n und $f(z)$ unabhängige obere Schranke μ besitzt, so gilt
$$\sigma_f\left(\frac{r}{m^n}, a\right) \leqq \frac{\mu}{Q^n}$$
also
$$D\left(\frac{r}{m^n}, a\right) \leqq \frac{\mu}{Q^n}.$$

Damit haben wir den folgenden Hilfssatz bewiesen:

Hilfssatz 2. Bei festem a und B gilt

$$D\left(\frac{r}{m^n}, a\right) \leqq \frac{\mu}{Q^n},$$

wobei μ die obere Schranke von $\sigma_f(r, a)$ bedeutet.

Zur Durchführung des Unitätsbeweises brauchen wir noch einen Hilfssatz. Sei B ein Gebiet, (bei welchem der unendlich ferne Punkt im Inneren liegen darf), das eine Folge von isolierten Begrenzungskomponenten

$$l_1, l_2, l_3, \ldots$$

besitzt, die sich durch innerhalb B liegende Kreisringe

$$r'_n \leqq |z - b_n| \leqq r''_n$$

isolieren lassen, wobei $\frac{r''_n}{r'_n}$ sich nicht beliebig dem Werte 1 nähern soll. Wir bilden B eineindeutig, direkt oder indirekt konform auf ein beschränktes Gebiet $\tilde{B}$ ab. Den l_n mögen $\tilde{l}_n$ entsprechen. Der gesamte Flächeninhalt des im Endlichen liegenden, nicht zu $\tilde{B}$ gehörigen, von den einzeln $\tilde{l}_n$ begrenzten Teile der Ebene möge $\tilde{s}$ heißen. Den Flächeninhalt von $\tilde{B}$ bezeichnen wir mit $\tilde{S}$.

Hilfssatz 3. Es gibt eine von der Abbildung unabhängige Konstante $\gamma < 1$, die der Ungleichung

$$\tilde{s} \leqq \gamma\,(\tilde{S} + \tilde{s})$$

genügt.

Beweis. Offenbar genügt es, dies nur für direkte konforme Abbildungen zu beweisen. Den Flächeninhalt des Bildringes von

$$r'_n < |z - b_n| < r''_n$$

bezeichnen wir mit $\tilde{s}_n$ und die Länge der Bildkurve von $|z - b_n| = r'_n$ mit $\tilde{\lambda}_n$. Es gilt offenbar

$$\frac{\tilde{\lambda}_n^2}{\tilde{s}_n} = \frac{(\int |f'(z)|\,ds)^2}{\iint |f'^2(z)|\,d0} \leqq \frac{4\pi^2 r'_n\, Max\,|f'^2(z)| \text{ auf } |z - b_n| = r'_n}{\pi\,(r''^2_n - r'^2_n)\, Min\,|f'^2(z)| \text{ in } r'_n < |z - b_n| < r''_n} \leqq \delta\,,$$

wobei $f(z)$ die Abbildungsfunktion bedeutet und δ eine von n und von $f(z)$ unabhängigen Konstante ist (Verzerrungssatz). Nun gilt aber

$$4\pi\,\tilde{s} \leqq \sum \tilde{\lambda}_n^2 \leqq \delta \sum \tilde{s}_n$$

also

$$\frac{4\pi}{\delta}\,\tilde{s} \leqq \sum \tilde{s}_n$$

und da

$$\tilde{s} + \sum \tilde{s}_n \leqq \tilde{S} + \tilde{s}$$

folgt

$$\left(\frac{4\pi}{\delta} + 1\right)\tilde{s} \leqq \tilde{S} + \tilde{s},$$

was zu beweisen war (vgl. 16, S. 232ff.).

IV. Entarteter Fall

Es sei

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

eine Folge von isolierten Punkten, die nur einen[1]) Häufungspunkt besitzt. Wir werden die Existenz einer zu diesen Punkten a_n gehörige starken Sperre nachweisen. Man darf offenbar annehmen, daß alle a_n und der Häufungspunkt im Endlichen liegen. Wir isolieren[2]) jeden Punkt a_n mit einem Kreis

$$|z - a_n| = r_n$$

und dann setzen wir $\varrho_n = \frac{r_n}{2^n}$. Es soll gezeigt werden, daß die Kreise

$$|z - a_n| = \varrho_n$$

eine starke Sperre bilden. Sei G ein von den Kreisen $|z - a_n| = \varrho_n$ gesperrtes Gebiet. Es ist also für G die Existenz und die Unität der Kreisabbildung zu beweisen.

Existenzbeweis. Betrachten wir die Familie $N(G)$ von in G eindeutigen, schlichten, analytischen Funktionen $f(z)$, die durch

$$f(z) = z + ((0))$$

im Unendlichen normiert sind. Solche Funktionen $f(z)$ sind im oben erklärten Sinne „affin". Wir bezeichnen mit M eine obere Schranke der Schwankung von $f(z)$ auf den Kreisen $|z - a_n| = r_n$. Diese obere Schranke ist endlich und von $f(z)$ und n unabhängig. Nach Hilfssatz 2 sind die Schwankungen von $f(z)$ auf $|z - a_n| = 2\varrho_n$ nicht größer als $\frac{M}{Q^{n-1}}$. Nun bezeichnen wir mit $\varphi(z)$ eine Funktion von $N(G)$, die die isolierten Begrenzungskomponenten von G in Kreise verwandelt. Es ist zu zeigen, daß bei dieser Abbildung aus der punktförmigen Häufungskomponente wieder eine punktförmige Häu-

1) Man kann anstatt einen auch endlich viele Häufungspunkte zulassen.

2) Damit ist gemeint, daß die Kreise $|z - a_n| \leqq r_n$ keine Punkte gemeinsam haben.

fungskomponente wird. Wir bezeichnen die Kreise

$$|z - a_n| = \frac{3}{2}\varrho_n$$

mit K_n und das Gebiet, das außerhalb der Kreise $|z - a_n| = 2\varrho_n$ liegt, mit Γ. Nun sei a ein im Inneren oder am Rande von Γ im Endlichen liegender von dem Häufungspunkt der a_n verschiedener Punkt. Wenn wir den unendlich fernen Punkt mit einem großen Kreis K isolieren, so gilt die Cauchysche Integralformel

$$2\pi i\varphi(a) = \oint_K \frac{\varphi(z)}{z-a}\,dz + \sum_{n=1}^{\infty} \oint_{K_n} \frac{\varphi(z)}{z-a}\,dz\,.$$

Es ist nämlich leicht, die Herleitung dieser Formel durch Isolierung des Häufungspunktes mittels einer Linie beliebig kleiner Länge und Grenzübergang durchzuführen. Wählen wir auf jedem Kreis K_n einen festen Punkt z_n, so gilt

$$\left|\oint_{K_n} \frac{\varphi(z)}{z-a}\,dz\right| = \left|\oint_{K_n} \frac{\varphi(z)-\varphi(z_n)}{z-a}\,dz\right| \leqq \frac{M}{Q^{n-1}} \cdot \frac{\frac{3}{2}\varrho_n \cdot 2\pi}{\frac{1}{2}\varrho_n} = 6\pi\frac{M}{Q^{n-1}}\,;$$

also ist (wegen der aus der vorherstehenden Abschätzung folgenden gleichmäßigen Konvergenz) $\varphi(a)$ in Γ gleichmäßig stetig. Um die gestellte Aufgabe zu lösen, genügt es zu zeigen, daß jede Folge von inneren Punkten von G, die gegen den Häufungspunkt von a_n konvergiert, auf eine konvergente Punktfolge abgebildet wird. Bezeichnen wir mit

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots$$

eine solche Folge. Mit

$$z_1',\ z_2',\ \ldots$$

bezeichnen wir diejenige Teilfolge von Punkten, die zu Γ gehören. Mit

$$z_1'',\ z_2'',\ \ldots$$

bezeichnen wir die übrigen Punkte der Folge. Nach der bewiesenen Stetigkeit ist die Folge[1]) $\bar{z}_n'$ konvergent. Es bleibt noch die Folge $\bar{z}_n''$ zu untersuchen. Zu jedem Punkt z_n'' gehört ein Kreis $|z - a_{k_n}| = 2\varrho_{k_n}$, der z_n'' in seinem Inneren enthält. Wir bezeichnen mit z_n''' einen Punkt auf seinem Rande. Auf Grund der Stetigkeit konvergiert $\bar{z}_n'''$ und zwar gegen denselben

1) Unter $\bar{z}$ verstehen wir den Bildpunkt von z.

Grenzpunkt wie $\bar{z}_n'$. Da die Abbildung affin ist, gilt

$$|\bar{z}_n'' - \bar{z}_n'''| \leqq \frac{M}{Q^{n-1}},$$

womit die Konvergenz von $\bar{z}_n$ bewiesen ist.

Unitätsbeweis. Nun wollen wir zeigen, daß die oben gewonnene Kreisabbildung die einzige ist. Wir nehmen an, G sei auf zwei Kreisgebiete $\bar{G}$ und $\bar{\bar{G}}$ abgebildet. Somit existiert eine eineindeutige konforme Abbildung von $\bar{G}$ auf $\bar{\bar{G}}$. Die Abbildungsfunktion möge $f(\bar{z})$ heißen und im Unendlichen durch

$$\bar{\bar{z}} = f(\bar{z}) = \bar{z} + ((0))$$

normiert sein. Wir werden zeigen, daß die Funktion

$$\varphi(\bar{z}) = f(\bar{z}) - \bar{z}$$

identisch verschwindet. Zu diesem Zwecke gehen wir von der Darstellung aus

$$2\pi i \varphi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_{\bar{\gamma}_n} \frac{\varphi(t)}{t-a} dt,$$

wobei $\bar{\gamma}_n$ die n^{te} isolierte Begrenzungskomponente von $\bar{G}$ bedeutet und a ein im Inneren von $\bar{G}$ liegender Punkt ist. Die Begründung dieser Darstellung verläuft ähnlich wie oben S. 121 unter der Beachtung der im vorhergehenden für die Größe der Kreise $\bar{\gamma}_n$ gewonnenen Schranken. Nun wählen wir auf jedem $\bar{\gamma}_n$ einen Punkt t_n und bezeichnen mit $\bar{S}$ bzw. $\bar{\bar{S}}$ den gesamten von[1]) $\bar{\gamma}_n$ bzw. $\bar{\bar{\gamma}}_n$ begrenzten Flächeninhalt. Man gewinnt leicht die Abschätzung

$$2\pi |\varphi(a)| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \oint \frac{\varphi(t)}{t-a} dt \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \oint \frac{\varphi(t) - \varphi(t_n)}{t-a} dt \right| \leqq 2 \frac{\bar{s} + \bar{\bar{s}}}{Min\,|t-a|}.$$

Wenn man an allen $\bar{\gamma}_n$ bzw. $\bar{\bar{\gamma}}_n$ spiegelt, erhält man eine analoge Abschätzung für die so analytisch fortgesetzte Funktion. Auf Grund des Hilfssatzes 3 liefert dies

$$2\pi |\varphi(a)| \leqq 2\gamma \frac{\bar{s} + \bar{\bar{s}}}{Min\,|t-a|}.$$

Nach m-facher Wiederholung der Spiegelung, wobei in jeder Stufe an jeder Begrenzungslinie des vorher erreichten Gesamtgebietes ein Bild des Aus-

1) Mit $\bar{\bar{\gamma}}_n$ bezeichnen wir die n-te isolierte Begrenzungskomponente von $\bar{\bar{G}}$.

gangsbereiches angesetzt wird, erhält man

$$2\pi\,|\,\varphi(a)\,| \leqq 2\cdot\gamma^m \frac{\bar{s}+\bar{\bar{s}}}{Min\,|\,t-a\,|},$$

also verschwindet $\varphi(a)$.

V. Nicht entarteter Fall

Wir wollen nun den Fall behandeln, wo die Punkte

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

im Inneren eines nicht entarteten, einfach zusammenhängenden Gebietes liegen, dessen vollständige Begrenzung von den Häufungspunkten der a_n gebildet wird. Damit ist gemeint, daß jeder Randpunkt des einfach zusammenhängenden Gebietes ein Häufungspunkt der a_n ist. Der Ausdruck „Randpunkt" ist dabei im Sinne von „Randelement" so zu verstehen, wie es bei der Ränderzuordnung üblich ist (s. P. Koebe, Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung I, J. f. Math., Bd. 145). Die Punkte a_n selbst sind wie immer als isoliert vorausgesetzt. Es ist die Existenz einer starken Sperre für die Punkte a_n nachzuweisen. Zunächst ist es offenbar keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir das erwähnte Gebiet als das Äußere des Einheitskreises voraussetzen; denn man kann den allgemeinen Fall durch eine konforme Abbildung auf den Kreisfall reduzieren. Außerdem darf man voraussetzen, daß alle Punkte a_n im Endlichen liegen.

Wie bei dem entarteten Fall isolieren wir jeden Punkt a_n durch einen Kreis

$$|\,z-a_n\,| = r_n$$

und setzen

$$\varrho_n = \frac{r_n}{2^n}.$$

Wir wollen zeigen, daß die Kreise

$$|\,z-a_n\,| = \varrho_n$$

eine starke Sperre bilden. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit G ein durch die Kreise $|\,z-a_n\,| = \varrho_n$ gesperrtes Gebiet. Wir werden für G die Existenz und die Unität der Kreisabbildung nachweisen.

Existenzbeweis. Für die Kreise

$$|\,z-a_n\,| = 2\varrho_n$$

$$|\,z-a_n\,| = \frac{3}{2}\varrho_n$$

führen wir die Bezeichnungen K_n bzw. k_n ein. Nun spiegeln wir am Einheitskreise. Das Spiegelbild von K_n bzw. k_n möge K_{-n} bzw. k_{-n} heißen. Das Spiegelbild von G möge G' heißen. Mit G_n werden wir das Gebiet bezeichnen, das von den ersten n Begrenzungskomponenten von G und von dem Einheitskreise begrenzt wird. Das Spiegelbild von G_n im bezug auf den Einheitskreis heiße G_n'. Wir bezeichnen mit $\varphi_n(z)$ die Funktion, die G_n auf ein Kreisgebiet abbildet. Dabei soll $\varphi_n(z)$ im Unendlichen durch

$$\varphi_n(z) = z + ((\theta))$$

normiert sein. Die Funktionen $\varphi_n(z)$ lassen sich durch Spiegelung auch in G_n' fortsetzen. Außerdem bilden sie sowohl im Inneren, wie auch im Äußeren je eine normale Familie. Wir wählen aus

$$\varphi_1(z),\ \varphi_2(z),\ \ldots$$

eine in G und G' konvergente Teilerfolge

$$\varphi_{n_1}(z),\ \varphi_{n_2}(z),\ \ldots$$

Wir setzen

$$\lim_{\mu\to\infty} \varphi_{n_\mu}(z) = \varphi(a).$$

Die Funktion $\varphi(z)$ leistet jedenfalls eine schlichte Abbildung des Gebietes G. Um zu zeigen, daß einer isolierten Begrenzungskomponente L von G bei der Abbildung eine Kreislinie entspricht, nehmen wir zunächst an, daß L eine reguläre geschossene Linie sei. Dann lassen sich die Näherungsfunktionen ein Stück über L analytisch fortsetzen. Sie sind in dieser Fortsetzung auch noch bsechränkt und folglich konvergieren die $\varphi_{n_\mu}(z)$ nach einem Satze von Stieltjes auch noch im erweiterten Gebiet gleichmäßig, womit der verlangte Beweis gewonnen ist. Ist L irgendein Begrenzungskontinuum, so können wir seine äußere Umgebung auf eine äußere Umgebung eines Kreises konform übertragen und die Funktionen $\varphi_{n_\mu}(z)$ auf diese Umgebung überpflanzen, woraus wieder das weitere folgt.

Nun sei a ein Punkt der Punktmenge

$$(|z|>1)\ \prod_{k=1}^{\infty}\ (|z-a| \geqq 2\varrho_k)$$

Es ist klar, daß

$$2\pi i\,\varphi_n(a) = \oint_C \frac{\varphi_n(z)}{z-a}\,dz + \sum_{v=-n}^{+n}{}' \oint_{k_v} \frac{\varphi_n(z)}{z-a}\,dz =$$

$$= \oint_C \frac{\varphi_n(z)}{z-a}\,dz + \sum_{v=-\infty}^{+\infty}{}' \oint_{k_v} \frac{\varphi_n(z)}{z-a}\,dz,$$

wobei C ein großer Kreis ist und Σ' bedeutet, daß der Summationsindex v den Wert Null nicht annimmt.

Auf jedem Kreise k_v wählen wir einen festen Punkt z_v. Es gilt offenbar auf Grund des Hilfssatzes 2

$$\left| \oint_{k_v} \frac{\varphi_n(z)}{z-a} dz \right| = \left| \oint_{k_v} \frac{\varphi_n(z) - \varphi_n(z_v)}{z-a} dz \right| \leqq \frac{A}{Q^{v-1}}$$

wobei A eine von v und n unabhängige Konstante bedeutet. Also gilt

$$2\pi \left| \varphi_{n_\mu}(a) - \varphi_{n_{\mu+\lambda}}(a) \right| \leqq \left| \oint_C \frac{\varphi_{n_\mu}(z) - \varphi_{n_{\mu+\lambda}}(z)}{z-a} dz \right| +$$

$$+ \sum_{v=-p}^{p}{}' \left| \oint_{k_v} \frac{\varphi_{n_\mu}(z) - \varphi_{n_{\mu+\lambda}}(z)}{z-a} dz \right| + 4 \sum_{v=p+1}^{\infty} \frac{A}{Q^{v-1}}$$

Nun wählen wir ein $\varepsilon > 0$. Dann kann man p und weiter μ unabhängig von a so bestimmen, daß

$$\left| \varphi_{n_\mu}(a) - \varphi_{n_{\mu+\lambda}}(a) \right| \leqq \varepsilon .$$

Damit ist die gleichmäßige Konvergenz in der Punktmenge

$$(|z| > 1) \cdot \left(\prod_{k=1}^{\infty} |z - a_k| \geqq 2\varrho_k \right) (C)$$

((C) bedeutet das Innere von C) nachgewiesen.

Die Funktionen $\varphi_n(z)$ bilden den Kreis

$$|z| = 1$$

auf Kreise

$$|z - c_n| = R_n$$

ab. Auf jeden Fall bleiben die Konstanten c_n und R_n beschränkt; denn die Abbildungsfunktionen $\varphi_n(z)$ sind im Unendlichen normiert. Man kann also annehmen, daß

$$c_\infty = \lim_{\mu \to \infty} c_{n_\mu}$$

$$R_\infty = \lim_{\mu \to \infty} R_{n_\mu}$$

existieren, weil dies jedenfalls für eine Teilfolge der bisherigen Folge gilt, für die wir die alten Bezeichnungen beibehalten.

Nun sei

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

eine konvergente Folge von innerhalb G liegenden Punkten, für welche

$$\lim_{k \to \infty} | z_k | = 1$$

ist. Um den Existenzsatz zu Ende führen zu können, genügt es zu zeigen, daß

$$\varphi(z_1), \varphi(z_2), \ldots$$

konvergiert und daß

$$\lim_{\varkappa \to \infty} | \varphi(z_k) - c_\infty | = R_\infty$$

ist. Dies wird gemacht analog wie bei dem entarteten Fall, indem man die nachgewiesene gleichmäßige Konvergenz benutzt.

Zusätzlich ergibt sich noch, daß es nicht vorkommen kann, daß

$$R_\infty = 0$$

wird. In der Tat, wenn

$$R_\infty = 0$$

wäre, so wäre das Grenzkreisgebiet $\tilde{G}$ durch Kreise begrenzt, die einer starken Sperre wie bei dem entarteten Fall unterworfen wären. In der Tat würde sich die für G vorhandene starke Sperre leicht umsetzen lassen in eine starke Sperre für $\tilde{G}$. Allerdings treten hier an Stelle der Kreise andere krumme Linien auf, so daß einige sinngemäße Modifikationen unter Beachtung der Verzerrungsgesetze vorzunehmen wären. Dies ändert jedoch das frühere Resultat nicht, daß der punktförmigen Häufungskomponente von $\tilde{G}$ bei jeder schlichten Abbildung eine ebensolche entsprechen müßte. Das ist aber unmöglich, da die Häufungskomponente von G nicht punktförmig ist.

Unitätsbeweis[1]). Es geht aus den voranstehenden Betrachtungen des Existenzsatzes hervor, daß es nicht möglich ist, G auf ein entartetes Kreisgebiet abzubilden. Sei nun G auf zwei Kreisgebiete $\tilde{G}$ und $\tilde{\tilde{G}}$, die also nicht ausgeartet sind, abgebildet.

Wir können annehmen, daß der Grenzkreis von $\tilde{G}$ bzw. $\tilde{\tilde{G}}$ der Einheitskreis ist. $\tilde{G}$ und $\tilde{\tilde{G}}$ erscheinen aufeinander bezogen. Sei

$$\tilde{\tilde{z}} = f(\tilde{z})$$

die Abbildungsfunktion. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß der Nullpunkt im Inneren von $\tilde{G}$ liegt und daß $f(\tilde{z})$ im

1) Vgl. 12, Teil II.

Nullpunkt durch

$$f(\bar{z}) = \bar{z}\,[c + ((0))] \quad (c \text{ reell und positiv})$$

normiert ist. Die isolierten Begrenzungskomponenten von $\bar{G}$ bzw. $\bar{\bar{G}}$ bezeichnen wir mit $\bar{\gamma}_n$ bzw. $\bar{\bar{\gamma}}_n$.

Nun spiegeln wir am Einheitskreise. Als Bild von $\bar{G}$ bzw. $\bar{\bar{G}}$ entsteht ein Gebiet $\bar{G}'$ bzw. $\bar{\bar{G}}'$. Die Bildkreise von $\bar{\gamma}_n$ bzw. $\bar{\gamma}_n$ bezeichnen wir mit $\bar{\gamma}_{-n}$ bzw. $\bar{\bar{\gamma}}_{-n}$.

Der gesamte Flächeninhalt der von den $\bar{\gamma}_n$ bzw. $\bar{\bar{\gamma}}_n$ begrenzten Teile der Ebene (es ist das Innere von $\bar{\gamma}_n$ bzw. $\bar{\bar{\gamma}}_n$ bei positivem und negativem n gemeint) möge $\bar{S}$ bzw. $\bar{\bar{S}}$ heißen. Aus der Funktion $f(\bar{z})$ entsteht durch Spiegelung eine in $\bar{G}'$ erklärte analytische, eindeutige und schlichte Funktion, die wir wieder mit $f(\bar{z})$ bezeichnen, obwohl sie bis auf weiteres im gewöhnlichen Sinne keine analytische Fortsetzung von der in $\bar{G}$ definierten Funktion ist. Wir führen die Funktion

$$\varphi(\bar{z}) = f(\bar{z}) - \left(\frac{z}{c} + a\right) \qquad [\text{im Unendlichen } \varphi(\bar{z}) = ((0))]$$

ein, für welche wir das identische Verschwinden nachweisen wollen. Zu diesem Zwecke leiten wir die Integraldarstellung

$$2\pi i\,\varphi(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \oint_{\gamma_n} \frac{\varphi(t)}{t-a}\,dt \tag{1}$$

für jeden im Inneren von $\bar{G}$ liegenden Punkt a her. Wir bilden einen Hilfskreis

$$|\bar{z}| = \mu$$

wobei $|a| < \mu < 1$ ist. Es kann vorkommen, daß manche von den Kreisen $\bar{\gamma}_n$ mit $|z| = \mu$ gemeinsame Punkte haben. Wir bezeichnen sie mit

$$\bar{\gamma}_{\mu_1},\ \bar{\gamma}_{\mu_2} \cdots \gamma_{\mu_N}.$$

Nun ersetzen wir die Teile von $|\bar{z}| = \mu$, die innerhalb $\bar{\gamma}_{\mu_v}$ liegen, durch die Teile der Peripherie von $\bar{\gamma}_{\mu_v}$, die innerhalb $|\bar{z}| = \mu$ liegen. Die so gewonnene Kurve bezeichnen wir mit $L(\mu)$. Das Spiegelbild von $L(\mu)$ heiße $L'(\mu)$. Nun ist es klar, daß

$$2\pi i\,\varphi(a) = \sum_{L(\mu)} \oint_{\bar{\gamma}_n} \frac{\varphi(t)}{t-a}\,dt + \oint_{L(\mu)} \frac{\varphi(t)}{t-a}\,dt \tag{2}$$

gilt, wobei $\sum\limits_{L(\mu)}$ die Summation über diejenigen Kreise $\bar{\gamma}_n$ bedeutet, die innerhalb $L(\mu)$ liegen.

Weiter gilt

$$\sum^{L'(\mu)} \oint\limits_{\bar{\gamma}_n} \frac{\varphi(t)}{t-a}\,dt + \oint\limits_{L'(\mu)} \frac{\varphi(t)}{t-a}\,dt = 0, \tag{3}$$

wobei $\sum^{L'(\mu)}$ die über die außerhalb $L'(\mu)$ liegenden Kreise $\bar{\gamma}_n$ erstreckte Summation bedeutet. Nun betrachten wir den Ausdruck

$$\delta_\mu = \oint\limits_{L(\mu)} \frac{\varphi(t)}{t-a}\,dt + \oint\limits_{L'(\mu)} \frac{\varphi(t)}{t-a}\,dt.$$

Wir wollen zeigen, daß er verschwindet, wenn $\mu \to 1$. Das Gebiet $\bar{G}$ ist als Bild des Gebietes G gewonnen, also ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \bar{r}_n$ der Radien von $\bar{\gamma}_n$ konvergent (das folgt aus der Abschätzung der Schwankung, Hilfssatz 2). Die Funktion $|\varphi(\bar{z})|$ ist stetig bei der Annäherung an den Einheitskreis und strebt gegen 1. Man bekommt leicht

$$\delta_\mu = \oint\limits_{L(\mu)} \frac{|\varphi(t)|^2 - 1}{\overline{\varphi}(t)(t-a)}\,dt + \oint\limits_{L(\mu)} \frac{1}{\overline{\varphi}(t)}\left[\frac{dt}{t-a} + \frac{d\bar{t}}{(1-a\bar{t})\bar{t}}\right],$$

woraus man sieht, daß $\lim\limits_{\mu \to 1} \delta_\mu = 0$.

Durch Addition von (2) und (3) und Grenzübergang $\mu \to 1$ folgt (1). Nun spiegeln wir an jedem Kreise $\bar{\gamma}_n$ (bei positivem und negativem n) das Gesamtgebiet $\bar{G}$. Die Bildkreise von $\bar{\gamma}_s$ bezeichnen wir mit $\bar{\gamma}_{ns}$. Mit der oben auseinandergesetzten Methode zeigt man, daß

$$\oint\limits_{\bar{\gamma}_n} \frac{\varphi(t)}{t-a}\,dt = \sum_{s=-\infty}^{\infty}{}' \oint\limits_{\bar{\gamma}_{ns}} \frac{\varphi(t)}{t-a}\,dt, \quad s \neq n,$$

also ist

$$2\pi i \varphi(a) = \sum_{n,s}{}' \oint\limits_{\bar{\gamma}_{ns}} \frac{\varphi(t)}{t-a}\,dt. \qquad s \neq n$$

Nach m-facher Wiederholung des Spiegelungsverfahrens bekommen wir

$$2\pi i \varphi(a) = \sum_{n,s\ldots q}{}' \oint \frac{\varphi(t)}{t-a}\,dt.$$

Aus dieser Formel gewinnt man durch Anwendung des Hilfssatzes 3 die

Abschätzung

$$|\varphi(a)| \leqq \gamma^m \frac{\tilde{s}+\tilde{\tilde{s}}}{\pi\, Min\, |t-a|}.$$

Also muß gelten

$$\varphi(a) = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß die Abbildung von $\tilde{G}$ auf $\tilde{\tilde{G}}$ linear ist.
Ich möchte zum Schluß ein Beispiel bringen, welches einem interessanten und lehrreichen Beispiel von Herrn Prof. Koebe nachgebildet ist (S. 24, insbesondere S. 60—71), um zu zeigen, daß es vorkommen kann, daß ein nicht entartetes Gebiet sich auf ein entartetes Kreisgebiet abbilden läßt. Allerdings sind die von uns an die Spitze gestellten Bedingungen nicht mehr erfüllt.

Beispiel. Wir betrachten das Gebiet A, dessen isolierte Begrenzungskomponenten die Kreisbögenschlitze

$$z = \pm \frac{n+1}{n} e^{i\theta} \qquad -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n}{n+1} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n}{n+1}$$

sind. Die Häufungskomponente ist der Einheitskreis. Der Teil von A, welcher oberhalb der Achse des Reellen liegt, ist einfach zusammenhängend. Wir bilden ihn auf die obere Hälfte der z'-Ebene ab unter Wahrung der Symmetrie bezüglich der Achse des Imaginären. In der z'-Ebene erscheinen die Bilder von den Kreisbögenschlitzen als Strecken auf der Achse des Reellen. Auf der oberen Hälfte des Einheitskreises gibt es aber nur einen erreichbaren Punkt, nämlich den Punkt i, dem bei der Abbildung der Nullpunkt entspricht. Nach der Theorie der Ränderzuordnung bei den Abbildungen von einfach zusammenhängenden Gebieten auf Kreisgebiete häufen sich also die obenerwähnten Strecken in der z'-Ebene am Nullpunkt. Wir setzen unsere Abbildung in dem unteren Teil von A durch Spiegelung an der Achse des Reellen fort. Das Bildgebiet von A bezeichnen wir mit A'. Das Gebiet A' ist aber symmetrisch. Es tritt also der Satz von Koebe (17) in Kraft, nach welchem sich A' auf ein Kreisgebiet abbilden läßt, und zwar so, daß die punktförmige Häufungskomponente von A' in eine ebensolche übergeht. Also ist es möglich, das Gebiet A auf ein Kreisgebiet so abzubilden, daß dabei der Einheitskreis sich auf einen Punkt reduziert.

VI. Schlußbemerkungen

Man kann das Ergebnis unserer Arbeit folgendermaßen zusammenfassen: man nehme ein Gebiet G_0, das von den isolierten Punkten

$$a_1,\ a_2,\ \ldots$$

und ihren Häufungspunkten begrenzt ist. Das Gebiet G_0 nach Weglassung der a_n sei einfach zusammenhängend. Für G_0 gilt dann offenbar das Kreisnormierungsprinzip. Das Ergebnis unserer Arbeit lautet summarisch folgendermaßen: das Kreisnormierungsprinzip gilt immer noch, wenn statt G_0 ein anderes von G_0 genügend wenig abweichendes Gebiet G vorliegt.

In unserer Arbeit war immer nur eine Häufungskomponente zugelassen. Die Methode läßt sich aber auch auf Fälle übertragen, wo endlich viele Häufungskomponenten auftreten.

VII. Literaturverzeichnis

(Die in eckigen Klammern gesetzten Zahlen bzw. Hinweise zeigen besondere Stellen der betreffenden Arbeit an, die für unser Problem von Wichtigkeit sind.)

P. Koebe: 1. „Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche, insbesondere solcher Bereiche, deren Begrenzung von Kreisen gebildet wird." Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 1906, Bd. 15, S. 142ff. — 2. „Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche." Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 1907, Bd. 16, S. 116ff. — 3. „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven (Imaginäre Substitationsgruppen), Mitteilung eines Grenzübergangs durch iterierendes Verfahren." Gött. Nachr. 1908, S. 112ff. — 4. „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, dritte Mitteilung." Gött. Nachr. 1908 [Schlußbemerkung.]. Hier wird zum erstenmal das allgemeine Kreisnormierungsprinzip ausgesprochen. — 5. „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe." Gött. Nachr. 1909. — 6. „Über ein allgemeines Uniformisierungsprinzip." Atti del congresso dei math. Rom 1908. Bd. II, S. 25—30. — 7. „Über die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche." Jahresber. Deutsch. Math.-Ver. 1910, Bd. 19, S. 339ff. (Überlagerungsmethode und iter. Verf.) — 8. „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe." Gött. Nachr. 1910 (Schlußbemerkung). — 9. „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven II." 1910, Bd. 69, S. 1—81. — 10. „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. I." Journ. rein und ang. Math. 1910, Bd. 138, S. 192—253 [§ 15]. — 11. „Begründung der Konituitätsmethode im Gebiete der konformen Abbildung und Uniformisierung." Gött. Nachr. 1912. — 12. „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven III." Math. Ann. 1912, Bd. 72. [Das allgemeine iterierende Verfahren ist im § 11 dargelegt. Siehe auch den zweiten Teil wegen des Unitätsbeweises.] — 13. „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven IV." Math. Ann. 1914, Bd. 75, S. 42—129 (Durchführung der Konituitätsbeweise). — 14. „Zur Theorie der konformen Abbildung und Uniformisierung." Sächs. Ak. 1914, Bd. 64, S. 67—75. — 15 „Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung V. (Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche)" Math. Zeitschr. 1918, Bd. 25, S. 198—236. (Kontinuitätsmethode.) — 16. „Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung VI. (Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche. Uniformisierung hyperelliptischer Kurven." Math. Zeitschr. 1920, Bd. 7, S. 235—301. [§§ 1—6 und §§ 16—21.] — 17. „Über konforme Abbildung endlich- und unendlich-vielfach zusammenhängender symmetrischer Bereiche." Acta math. 1922, Bd. 43, S. 263—287. — 18. „Methoden der konformen Abbildung und Uniformisierung." Cong. intern. Bologna 1928, S. 195—203. — 19. „Wesen der Kontinuitätsmethode." Deutsch. Math. 1935, Jahrg. 1 [S. 871].

20. A. Fischer, „Über die konforme Abbildung symmetrischer unendlich-vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche." (Diss. Jena 1915.)

21. K. Georgi, „Über die konforme Abbildung gewisser nichtsymmetrischer unendlich-vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche." (Diss. Jena 1915.)

22. H. Denneberg, „Konforme Abbildung einer Klasse unendlich-vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Kreisbereiche." Sächs. Ak. 1932, S. 331ff. (Diss. Leipzig 1932.)

23. H. Grötzsch, „Eine Bemerkung zum Koebeschen Kreisnormierungsprinzip." Sächs. Ak. 1935, S. 319ff.

24. P. Koebe, „Zur konformen Abbildung unendlich-vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche." Gött. Nachr. 1918, S. 60—71.

Lebenslauf

Ich, Jaroslaw Alexandrow Tagamlizki, bulgarischer Staatsangehöriger, bin am 11. 9. 1917 in Armawir als Sohn des Ingenieurs Alexander Tagamlizki und seiner Ehefrau Wera geboren. In Sofia besuchte ich die Volksschule und die halbklassische Abteilung des zweiten männlichen Gymnasiums, die ich 1936 absolvierte. Acht Semester (Schuljahre 1936/37 bis 1939/40) studierte ich Mathematik an der Universität Sofia (Bulgarien). Dort hörte ich die Vorlesungen über Mathematik der Herren Popow, Tschakalow, Obreschkow, Tabakow, Zenow und Stojanow, diejenigen über Physik der Herren Nadjakow, Pentschew, Manew und Rajnow und endlich über Astronomie des Herrn Bonew. Während des Schuljahres 1940/41 war ich als Hilfskraft an der Universität Sofia tätig. Während der Schuljahre 1941/42 und 1942/43 habe ich drei Semester als ordentlicher Student in Leipzig Vorlesungen bei den Herren Koebe, v. d. Waerden, Schnee, Hopf, Heisenberg, Hund und Hopmann gehört. Dann begann ich mit der Ausarbeitung dieser Abhandlung.

Für die freundliche Ermutigung bei der Entstehung meiner Dissertation bin ich Herrn Prof. Dr. Koebe besonderen Dank schuldig.

Druck der August Pries GmbH. in Leipzig