ДОКЛАДЫ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

НОВАЯ СЕРИЯ

1947

ОТТИСК из т. LVII, № 1

Доклады Академии Наук СССР
1947. Том LVII, № 1

МАТЕМАТИКА

Я. А. ТАГАМЛИЦКИЙ

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 20 II 1947)

Пусть E — множество точек n-мерного евклидова пространства, измеримое в смысле Лебега с конечной мерой. Рассмотрим последовательность суммируемых в E функций

$$f_1(P),\ f_2(P), \ldots, \tag{1}$$

асимптотически сходящуюся [1] к $f(P)$.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f(P)$ была суммируема и последовательность*

$$\int_e f_1(P)\,dP, \quad \int_e f_2(P)\,dP, \ldots$$

сходилась к $\int_e f(P)\,dP$ для каждого измеримого подмножества $e \subseteq E$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой частичной последовательности

$$\varphi_1(P),\ \varphi_2(P), \ldots,$$

выбранной из (1), *можно было найти неотрицательную суммируемую функцию $\varphi(P)$ так, чтобы неравенство*

$$|\varphi_k(P)| \leqslant \varphi(P)$$

было выполнено для бесконечного множества значений k.

Доказательство. Сперва мы покажем достаточность условия. Для этого мы допустим противное тому, что мы хотим установить. В таком случае, на основании одной теоремы Витали [2], можно утверждать, что интегралы $\int_e f_k(P)\,dP$ не могут быть равностепенно абсолютно непрерывны. Итак, существует по меньшей мере одно положительное число ε такое, что можно подобрать измеримое множество e_ν и целое положительное число k_ν, для которых неравенства

$$me_\nu \leqslant \frac{1}{\nu}, \quad \left|\int_{e_\nu} f_{k_\nu}(P)\,dP\right| \geqslant \varepsilon$$

выполнены при всех целых положительных значениях ν.

С другой стороны, для последовательности

$$f_{k_1}(P),\ f_{k_2}(P), \ldots$$

можно подобрать суммируемую функцию $\varphi(P)$ таким образом, чтобы неравенство

$$|f_{k_\nu}(P)| \leqslant \varphi(P)$$

было выполнено для бесконечного множества значений ν. Таким образом, при этих значениях ν будем иметь

$$\int_{e_\nu} \varphi(P)\,dP \geqslant \left| \int_{e_\nu} f_{k_\nu}(P)\,dP \right| \geqslant \varepsilon,$$

т. е. интеграл от функции $\varphi(P)$ не может быть абсолютно непрерывным. Таким образом, предположение, из которого мы исходим, привело нас к противоречию. Итак, условие достаточно.

Теперь мы покажем необходимость условия. Пусть

$$\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots$$

некоторая частичная последовательность, выбранная из (1). На основании известной теоремы Х. Хана ([3]) имеем

$$\lim_{k \to \infty} \int_E |\varphi_k(P) - f(P)|\,dP = 0.$$

Можно, следовательно, выбрать такую последовательность целых положительных чисел

$$k_1, k_2, k_3, \ldots,$$

чтобы ряд

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E |\varphi_{k_i}(P) - f(P)|\,dP$$

сходился. В таком случае функция

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_{k_i}(P) - f(P)|$$

суммируема (на основании одной теоремы Фату ([4])). Рассмотрим теперь суммируемую функцию

$$\varphi(P) = |f(P)| + \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_{k_i}(P) - f(P)|.$$

Очевидно,

$$|\varphi_{k_i}(P)| \leqslant \varphi(P),$$

что и доказывает наше утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $f(P)$ была суммируема в E и последовательность*

$$\int_e f_1(P)\,dP, \quad \int_e f_2(P)\,dP, \ldots \tag{2}$$

сходились к $\int_e f(P)\,dP$ для каждого измеримого подмножества $e \subseteq E$, необходимо и достаточно, чтобы каждая частичная последовательность, выбранная из (2), имела по меньшей мере одну абсолютно непрерывную предельную функцию.

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Мы покажем, что условие достаточно. Мы пока предположим, что функция $f(P)$ суммируема. Допустим, что последовательность (2) не сходится к $\int\limits_{e} f(P)\,dP$. В таком случае существует положительное число ε и подмножество $G \subseteq E$, для которых неравенство

$$\left|\int\limits_{G} [f_k(P) - f(P)]\,dP\right| \geqslant \varepsilon$$

выполнено для бесконечного множества значений k

$$k_1, k_2, \ldots$$

Выберем из последовательности

$$f_{k_1}(P), f_{k_2}(P), \ldots$$

после довательность

$$\varphi_1(P), \varphi_2(P), \ldots,$$

которая сходится почти всюду к $f(P)$. Пусть G_ν — множество тех точек, принадлежащих G, в которых выполнено наравенство

$$|\varphi_k(P) - f(P)| \geqslant \frac{\varepsilon}{2mG}$$

по меньшей мере для одного значения $k > \nu$. Очевидно, имеем

$$G_\nu \supseteq G_{\nu+1}, \qquad \lim_{\nu \to \infty} G_\nu = 0.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{G} [\varphi_k(P) - f(P)]\,dP =$$

$$= \int\limits_{G - G_\nu} [\varphi_k(P) - f(P)]\,dP + \int\limits_{G_\nu} \varphi_k(P)\,dP - \int\limits_{G_\nu} f(P)\,dP$$

и, следовательно, при $k > \nu$

$$\varepsilon \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int\limits_{G_\nu} \varphi_k(P)\,dP\right| + \left|\int\limits_{G_\nu} f(P)\,dP\right|.$$

Пусть $J(e)$ — любая абсолютно непрерывная предельная функция последовательности

$$\int\limits_{e} \varphi_1(P)\,dP, \quad \int\limits_{e} \varphi_2(P)\,dP, \ldots$$

В таком случае получаем

$$|J(G_\nu)| + \left|\int\limits_{G_\nu} f(P)\,dP\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

и, следовательно, функции $J(e)$ и $\int\limits_{e} f(P)\,dP$ не могут быть одновременно абсолютно непрерывными. Таким образом, мы пришли к противоречию.

Для того чтобы закончить доказательство, остается показать, что функция $f(P)$ суммируема. Доказательство можно легко провести, пользуясь известным приемом Фату ([4]).

Поступило
20 II 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] F. Riesz, C. R., **148**, 1303 (1909). [2] G. Vitali, Rend. Circ. Mat. Palermo, **23**, 137 (1907). [3] H. Hahn, Sitzungsber. Ak. Wiss. Wien, IIa, 127 (1918). [4] P. Fatou, Acta Mathemat., **30**, 375 (1906). [5] F. Fichtenholtz, C. R., **184**, 436 (1927).