Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sciences
Tome 1, № 1, Janvier-Mars, 1948

9. Sur une propriété de la fonction exponentielle. *Y. Tagamlitzki* 33

Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences
Tome 1, № 1, Janvier-Mars, 1948

MATHÉMATIQUES

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Note de **Y. Tagamlitzki**

(Présentée par L. Tchakaloff le 13. VI. 1947)

Dans un travail récent nous avons établi le théorème suivant:[1])

S i l a f o n c t i o n r é e l l e $f(x)$, a d m e t t a n t p o u r $x \geqq a$ u n e s u i t e i l l i m i t é e d e d é r i v é e s, v é r i f i e l e s i n é g a l i t é s

$$|f^{(n)}(x)| \leqq Ae^{-x}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

e l l e s e r é d u i t à l a f o n c t i o n e x p o n e n t i e l l e $f(x) = Ce^{-x}$.

Les démonstrations connues de ce théorème impliquant des méthodes de la théorie des fonctions analytiques dans le domaine complexe, il serait désirable de trouver un procédé direct, qui ne fasse pas appel au domaine complexe. Nous allons donner ici une telle démonstration.

D é m o n s t r a t i o n. La fonction $f(x)$ vérifiant les inégalités (1), on trouve en intégrant par parties

$$f^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^{k-n}}{(k-n+1)!} \int_x^\infty f^{(k+1)}(t)(t-x)^{k-n+1}\, dt$$

pour $k \geqq n-1$, k et n étant des nombres entiers et positifs.

Considérons maintenant l'identité

$$e^{-x} f(x) + 2e^{-x} f'(x) + e^{-x} f''(x) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{(k-1)!\,(k+1)!} \int_x^\infty e^{-u}(u-x)^{k-1}\, du \int_x^\infty f^{(k+2)}(t)(t-x)^{k+1}\, dt +$$

$$+ \frac{2(-1)^{k-1}}{k!^2} \int_x^\infty e^{-u}(u-x)^k\, du \int_x^\infty f^{(k+2)}(t)(t-x)^k\, dt +$$

[1]) Y. T a g a m l i t z k i, Funktionen, die auf der reellen Achse gewissen Ungleichungen genügen, Annuaire de l'Université de Sofia, t. XLII, (1945—46), p. 239. — Sur les suites vérifiant certaines inégalités, Comptes rendus Ac. Sc. Paris, t. 223 (1946) p. 940—942.

$$+\frac{(-1)^{k-2}}{(k+1)!\,(k-1)!}\int_x^\infty e^{-u}(u-x)^{k+1}\,du\int_x^\infty f^{(k+2)}(t)(t-x)^{k-1}dt=$$

$$=\frac{(-1)^k}{(k-1)!\,(k+1)!}\int_x^\infty\int_x^\infty e^{-u}f^{(k+2)}(t)\,(u-x)^{k-1}(t-x)^{k-1}(u-t)^2\,du\,dt+$$

$$+(-1)^k\left[\frac{2}{(k+1)!\,(k-1)!}-\frac{2}{k^2!}\right]\int_x^\infty e^{-u}(u-x)^k\,du\int_x^\infty f^{(k+2)}(t)(t-x)^k dt,$$

ou bien

$$e^{-x}[f(x)+2f'(x)+f''(x)]= \tag{2}$$

$$=\frac{(-1)^k}{(k-1)!\,(k+1)!}\int_x^\infty\int_x^\infty e^{-u}f^{(k+2)}(t)\,(u-x)^{k-1}(t-x)^{k-1}(u-t)^2\,du\,dt+$$
$$+\frac{2e^{-x}f'(x)}{k+1}.$$

La fonction $f(x)$ vérifiant les inégalités (1), on a

$$|e^{-x}[f(x)+2f'(x)+f''(x)]|\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{(k-1)!\,(k+1)!}\int_x^\infty\int_x^\infty e^{-u-t}(u-x)^{k-1}(t-x)^{k-1}(u-t)^2du\,dt+\frac{2e^{-x}|f'(x)|}{k+1}.$$

Dans le cas particulier $f(x)=e^{-x}$ la formule (2) nous donne

$$\frac{1}{(k-1)!\,(k+1)!}\int_x^\infty\int_x^\infty e^{-u-t}(u-x)^{k-1}(t-x)^{k-1}(u-t)^2\,du\,dt-\frac{2e^{-2x}}{k+1}=0$$

et, par conséquent,

$$|f(x)+2f'(x)+f''(x)|\leqq\frac{2e^{-x}}{k+1}+\frac{2\,|f'(x)|}{k+1}.$$

Le nombre entier et positif k étant arbitraire, on a

$$f(x)+2f'(x)+f''(x)=0$$

et par suite $\qquad f(x)=Ce^{-x}+C_1xe^{-x}.$

D'autre part on a $\qquad |Ce^{-x}+C_1xe^{-x}|\leqq Ae^{-x},$

d'où il suit $C_1=0$.

La démonstration que nous venons d'exposer est une modification d'une méthode que nous avons appliquée à l'étude des suites régulièrement monotones [1]).

Institut de mathématiques de l'Université de Sofia.

[1]) Y. Tagamlitzki, Über Zahlenfolgen, die gewissen Ungleichungen genügen, Annuaire de l'Université de Sofia, t. XLIII, (1946—47) p. 193.