

Д О К Л А Д Ы
АКАДЕМИИ НАУК СССР

НОВАЯ СЕРИЯ

1950

ОТТИСК ИЗ т. LXXV, № 3

Я. А. ТАГАМЛИЦКИЙ

**О ФУНКЦИЯХ, ПРОИЗВОДНЫЕ КОТОРЫХ УДОВЛЕТВОРЯЮТ
НЕКОТОРЫМ НЕРАВЕНСТВАМ**

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 29 IX 1950)

1. Обозначим через $f(x)$ функцию, допускающую при $x > a$ производные всех порядков, и через x_0 — действительное число, большее a . Мы докажем следующую теорему:

Теорема. Если функция $f(x)$ удовлетворяет неравенствам

$$|f^{(k)}(x)| \leq (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} (x_0 - x) e^{-x} = (x_0 + k - x) e^{-x} \quad (1)$$

при $a < x \leq x_0 + k$ и $k = 0, 1, 2, \dots$, то $f(x) = C(x_0 - x)e^{-x}$, где C — некоторая постоянная, причем $|C| \leq 1$.

Доказательство. Функцию $f(x)$ можно разложить в степенной ряд, который сходится всюду, как это видно из неравенств (1). Таким образом, это целая функция.

Покажем, что $f(z)$ можно разложить в ряд Абеля

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} f^{(\nu)}(x_0 + \tau\nu) \frac{(x_0 - z)(x_0 + \tau\nu - z)^{\nu-1}}{\nu!}$$

при всех значениях z , если $0 < \tau < 1$.

Покажем сначала, что функцию $(x_0 - z)e^{-z}$ можно разложить в ряд Абеля

$$(x_0 - z)e^{-z} = \sum_{\nu=1}^{\infty} (1 - \tau) e^{-x_0 - \tau\nu} \frac{(x_0 - z)(x_0 + \tau\nu - z)^{\nu-1}}{(\nu - 1)!} \quad (2)$$

при $0 < \tau < 1$.

Ряд

$$\varphi_{\tau}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (1 - \tau) e^{-x_0 - \tau\nu} \frac{(x_0 - z)(x_0 + \tau\nu - z)^{\nu-1}}{(\nu - 1)!} \quad (3)$$

сходится равномерно во всякой ограниченной области значений z , как это видно из неравенства

$$\begin{aligned} & \left| (1 - \tau) e^{-x_0 - \tau\nu} \frac{(x_0 - z)(x_0 + \tau\nu - z)^{\nu-1}}{(\nu - 1)!} \right| \leq \\ & \leq \left| \frac{1 - \tau}{\tau} e^{-x_0} (x_0 - z) \left(1 + \frac{x_0 - z}{\tau\nu} \right)^{\nu-1} \right| (e^{1 - \tau})^{\nu}. \end{aligned}$$

Поэтому $\varphi_\tau(z)$ является целой функцией от z . Мы покажем, что эта функция совпадает с функцией $(x_0 - z)e^{-z}$ при всех действительных значениях $z = x$, не превосходящих x_0 , откуда будет следовать, что $\varphi_\tau(z) \equiv (x_0 - z)e^{-z}$.

Для этого рассмотрим остаточный член абелева разложения функции $(x_0 - x)e^{-x}$. Положив для краткости $x_0 + \tau v = x_v$, при $x < x_0$ имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq R_n(x) &= \int_x^{x_0} dt_1 \int_{t_1}^{x_1} dt_2 \dots \int_{t_n}^{x_n} (x_{n+1} - t_{n+1}) e^{-t_{n+1}} dt_{n+1} \leq \\ &\leq (x_{n+1} - x) e^{-x} \int_x^{x_0} dt_1 \int_{t_1}^{x_1} dt_2 \dots \int_{t_n}^{x_n} dt_{n+1} \leq (x_0 - x) e^{-x} \left(1 + \frac{x_0 + \tau - x}{\tau^n}\right)^n (\tau e)^n. \end{aligned}$$

Итак, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, по крайней мере, при $0 < \tau < 1/e$. Для того чтобы установить разложимость функции $(x_0 - z)e^{-z}$ в ряд Абеля при всех значениях τ , удовлетворяющих неравенствам $0 < \tau < 1$, будем изучать ряд (3) при постоянном z как функцию от τ , рассматривая τ как комплексное переменное в прямоугольнике G , определяемом неравенствами $\alpha < \operatorname{Re}(\tau) < \beta$, где $0 < \alpha < \beta < 1$ и $-\gamma < \operatorname{Im}(\tau) < \gamma$, где положительное число γ удовлетворяет неравенствам $\gamma^2 < \alpha(1 - \beta)$ и $e^{1 - \beta} \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} < 1$. Для комплексных значений τ , лежащих в G , получаем

$$\begin{aligned} \left| (1 - \tau) e^{-x_0 - \tau v} \frac{(x_0 - z)(x_0 + \tau v - z)^{v-1}}{(v-1)!} \right| &\leq \\ &\leq \frac{1 + \beta + \gamma}{\alpha} e^{-x_0} |x_0 - z| \left(1 - \frac{|x_0 - z|}{\alpha v}\right)^{v-1} (e^{1 - \beta} \sqrt{\beta^2 + \gamma^2})^v, \end{aligned}$$

и, так как $0 < e^{1 - \beta} \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} < 1$, то заключаем, что ряд (3) сходится равномерно в прямоугольнике G и, следовательно, определяет аналитическую функцию от τ . Выше мы установили, что эта аналитическая функция $\varphi_\tau(z)$ является постоянной $(x_0 - z)e^{-z}$ при действительных значениях τ в промежутке $0 < \tau < 1/e$. Из этого вытекает, что она равна той же постоянной $(x_0 - z)e^{-z}$ и во всем прямоугольнике G , а следовательно, и в промежутке $0 < \tau < 1$, ввиду того, что α и β ограничены только условием $0 < \alpha < \beta < 1$. Итак, при всех комплексных значениях z и при всех (действительных) значениях τ , для которых $0 < \tau < 1$, справедлива формула (2).

Теперь нетрудно установить разложимость в ряд Абеля целой функции $f(z)$. В силу неравенств (1) и (4) ряд

$$g(z) = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v f^{(v)}(x_0 + \tau v) \frac{(x_0 - z)(x_0 + \tau v - z)^{v-1}}{v!}$$

сходится на всей плоскости и определяет некоторую целую функцию $g(z)$. Мы покажем, что эта функция совпадает с функцией $f(z)$ при всех действительных значениях x из промежутка (a, x_0) . Это обеспечит совпадение функций $f(z)$ и $g(z)$ при всех комплексных значениях z . Рассмотрим остаточный член абелева разложения функции $f(x)$. На основании неравенств (1) получаем при $a < x < x_0$

$$|r_n(x)| = \left| (-1)^{n+1} \int_x^{x_0} dt_1 \int_{t_1}^{x_1} dt_2 \dots \int_{t_n}^{x_n} f^{(n+1)}(t_{n+1}) dt_{n+1} \right| \leq R_n(x), \quad (4)$$

откуда вытекает разложимость функции $f(x)$ в ряд Абеля при $0 < \tau < 1$ и $a < x < x_0$, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ в силу разложимости функции $(x_0 - x)e^{-x}$.

Докажем теперь, что при всех комплексных значениях z выполняется неравенство

$$|f(z)| \leq A|(x_0 - z)e^{-z}| \quad (5)$$

при подходящем выборе постоянной A .

Пусть $z = x + iy$, где x и y — действительные числа. Обозначая через N целое число, большее, чем $4|x_0 - x|$ и чем $2y^2$, заключаем, что при $\tau > 1/2$ и $\nu > N$ имеем

$$1 + \frac{x_0 - x}{\tau\nu} > \frac{1}{2}, \quad \frac{y^2}{\tau\nu} < 1. \quad (6)$$

Отметим, что N не зависит от τ . Пользуясь неравенствами (6), получаем

$$\begin{aligned} |x_0 + \tau\nu - z|^{\nu-1} &= (\tau\nu)^{\nu-1} \left(1 + \frac{x_0 - x}{\tau\nu}\right)^{\nu-1} \left[1 + \frac{y^2}{\tau^2\nu^2 \left(1 + \frac{x_0 - x}{\tau\nu}\right)^2}\right]^{\frac{\nu-1}{2}} \leq \\ &\leq (\tau\nu)^{\nu-1} \left(1 + \frac{x_0 - x}{\tau\nu}\right)^{\nu-1} \left[1 + \frac{8}{\nu}\right]^{\frac{\nu-1}{2}} \leq A(x_0 + \tau\nu - x)^{\nu-1}, \end{aligned} \quad (7)$$

где A — какая-нибудь верхняя грань выражения $\left(1 + \frac{8}{\nu}\right)^{\frac{\nu-1}{2}}$ и не зависит от τ и z . Далее, пользуясь неравенствами (1) и (7), находим, что при $1/2 < \tau < 1$

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \left| \sum_{\nu=0}^N (-1)^\nu f^{(\nu)}(x_0 + \tau\nu) \frac{(x_0 - z)(x_0 + \tau\nu - z)^{\nu-1}}{\nu!} \right| + \\ &+ \frac{A|x_0 - z|}{x_0 - x} \left[(x_0 - x)e^{-x} - \sum_{\nu=1}^N (1 - \tau)e^{-x_0 - \tau\nu} \frac{(x_0 - x)(x_0 + \tau\nu - x)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \right]. \end{aligned}$$

Выполняя переход к пределу $\tau \rightarrow 1$ при постоянном z , получим неравенство (5), так как, с одной стороны, $\lim_{\tau \rightarrow 1} f^{(\nu)}(x_0 + \tau\nu) = 0$, а с другой, N и A не зависят от τ .

Для завершения доказательства теоремы применяем теорему Лиувилля к целой функции $\frac{f(z)}{(x_0 - z)e^{-z}}$ и заключаем в силу (5), что она равна постоянной; итак, $f(z) = C(x_0 - z)e^{-z}$. Неравенство $|C| \leq 1$ вытекает из неравенств (1). Теорема доказана.

2. Рассмотрим полином

$$P_\nu(x) = \frac{(x_0 - x)(x_0 + \tau\nu - x)^{\nu-1}}{\nu!},$$

где ν — целое неотрицательное число. Нетрудно установить, что если неравенства

$$|f^{(k)}(x)| \leq (-1)^k P_\nu^{(k)}(x)$$

выполнены при $a < x \leq x_0 + k$ и $k = 0, 1, 2, \dots$, то $f(x) = CP_\nu(x)$, где C — некоторая постоянная, причем $|C| \leq 1$. Мы показали недавно (1), что теория рядов Абеля получает новое освещение, если наряду с полиномами $P_\nu(x)$ рассматривать все функции $\varphi(x)$, для которых из неравенств $|f^{(k)}(x)| \leq (-1)^k \varphi^{(k)}(x)$ при $a < x \leq x_0 + k$ и $k = 0, 1, 2, \dots$

вытекает равенство $f(x) = C\varphi(x)$. Таковой является функция $(x_0 - x)e^{-x}$. С этой точки зрения мы изучали также ряды Дирихле и интегральное уравнение Лапласа⁽²⁾, пользуясь тем⁽³⁻⁵⁾, что из неравенств $|f^{(k)}(x)| \leq \lambda^k e^{-\lambda x}$, выполненных при $x > a$, вытекает неравенство $f(x) = Ce^{-\lambda x}$, если $\lambda \geq 0$.

Поступило
5 IV 1950

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Я. Тагамлицкий, Годишник на Софийския университет, **45**, 263 (1948—1949).
² Я. Тагамлицкий, там же, **44**, 317 (1947—1948). ³ J. Tagamlitzki, C. R., **223**, 940 (1946). ⁴ R. P. Boas, C. R., **224**, 1683 (1947). ⁵ M. Loève, C. R., **225**, 31 (1947).