1972 г.

Върху принципа за максимум

Я.Тагамлицки

Нека Σ е една фамилия от функции, дефинирани в някое компактно пространство M и полунепрекъснати отгоре. Нека S е подмножество на M и a е точка от S. Ще казваме, че a и S удовлетворяват условието за максимум, ако неравенството

$$f(x) \leqq f(a)$$

може да бъде изпълнено за някоя функция от Σ при всяко x от S само, ако $f(x)$ е константа върху S.

Да положим

$$\gamma = [f(x), \ell]$$

където $f \in \Sigma$ и ℓ е число. В съвокупността на двойките γ ще установим наредба по следния начин. Нека

$$\gamma_1 = [f_1, \ell_1], \quad \gamma_2 = [f_2, \ell_2]$$

са две двойки от разглеждания вид. Ще пишем

$$\gamma_1 < \gamma_2,$$

когато

$$f_1(x) = f_2(x) \qquad \ell_1 \leqq \ell_2 .$$

С $\varphi(\gamma)$ ще означим съвокупността от онези точки x от M, за които е изпълнено неравенството

$$f(x) < \ell,$$

където

$$\gamma = [f, \ell].$$

Да изберем $\varphi(\gamma)$ като разделяща функция на M. По такъв начин M се превръща в индуктивно пространство, и ~~По такъв начин~~ добиват смисъл в разглеждания случай понятията скобка, неразложимаст и еквивалентност.

Теорема 1. Ако за едно подмножество S на M и за една точка a от S е изпълнено условието за максимум, то

$$a \in (S)$$

Доказателство. Нека

$$\gamma_1 = [f_1, \ell_1],$$

където $f_1 \in \Sigma$ и ℓ_1 е число, е такова, че $\varphi(\gamma_1)$ съдържа поне една точка x_1 от S и поне една точка x_2 не съдържа. Тогава f_1 не е константа върху S, защото

$$f_1(x_1) < \ell_1 \quad и \quad f_1(x_2) \geqq \ell_1 .$$

От друга страна a и S удовлетворяват условието за максимум. Следователно неравенството

$$f_1(x) \leqq f_1(a)$$

ще бъде нарушено поне в една точка x_3 от S, т.е.

$$(1) \qquad f_1(a) < f_1(x_3).$$

Да разгледаме първо по-интересния случай, когато точката a не принадлежи на $\varphi(\gamma_1)$. В такъв случай

$$\ell \leqq f_1(a)$$

което заедно с (1) ни дава

$$\ell < f_1(x_3).$$

Да положим

$$\gamma_2 = [f_1(x), f_1(x_3)]$$

В такъв случай $\gamma_1 < \gamma_2$, защото

$$\ell < f_1(x_3).$$

Същевременно

$$a \in \varphi(\gamma_2) \quad , x_3 \bar{\in} \varphi(\gamma_2),$$

защото

$$f_1(a) < f_1(x_3) \quad и \quad f_1(x_3) \neq f_1(x_3).$$

Ако ли пък $a \in \varphi(\gamma_1)$, полагаме $\gamma_2 = \gamma_1$, с което е доказано, че

$$a \in (S).$$

<u>Дефиниция.</u> Една точка P от M ще наричаме крайна, ако всеки път, когато е изпълнено условието за максиум за тази точка и за някое подмножество S на M, което я съдържа, точките на S са неотделими помеждуси с функции от Σ.

<u>Теорема 2</u>. Ако една точка е неразложима, тя е крайна.

<u>Доказателство</u>. Нека P е неразложима точка на и нека е изпълнено условието за максимум за P и S. Съгласно доказаното по-горе имаме $p \in (S)$ и, тъй като точката p е неразложима, имаме $p \approx x_0$ при всяко x_0 от S. Да положим

$$\gamma_1 = [f, f(x_0)+\varepsilon], \quad \gamma_2 = [f, f(p)+\varepsilon],$$

където $f \in \Sigma$ и $\varepsilon > 0$.

В такъв случай

$$x_0 \in \varphi(\gamma_1), \quad p \in \varphi(\gamma_2)$$

и следователно трябва да имаме

$$p \in \varphi(\gamma_1) \qquad x_0 \in \varphi(\gamma_2)$$

което ни дава

$$f(p) < f(x_0)+\varepsilon, \quad f(x_0) < f(p)+\varepsilon$$

и следователно

$$f(p) = f(x_0).$$

<u>Теорема 3</u>. Всяка функция от Σ достига максимума си в поне една неразложима точка.

<u>Доказателство</u>. Нека f е една функция от Σ. Понеже f е полунепрекъсната отгоре, а M е компактно, то f достига максимума си в някоя точка от M. Да означим с ℓ този максимум. Да положим

$$\gamma = [f, \ell]$$

Ако допуснем, че за всяка неразложима точка P имаме $f(p) < \ell$, то $\varphi(\gamma)$ ще съдържа всичките неразложими точки на M и следавателно съгласно топологичната индукция, за всяко x от M ще имаме $x \in \varphi(\gamma)$, т.е.

$$f(x) < \ell,$$

което противоречи на това, че максимумът ℓ се достига някъде в M.

Доказаната теорема 3 съдържа принципа за максимум на Бауер,който граси както следва.

Принцип за максимум на Бауер. Всяка функция от достига максисума си поне в една крайна точка.

Доказателство. Ние видяхме,че всяка функция от достига максимума си поне в една неразложима точка.От друга страна всяка неразложима точка е и крайна.С това теоремата на Бауер е доказана.