Приложение на една редукционна формула за интеграли върху многообразия към въпроса за неподвижните точки.

от Я. Тагамлицки

Неотдавна ние установихме една обща редукционна формула за интеграли върху многообразия. Да припомним тази формула.

Нека функциите

$$F_1(t_1, \dots, t_{n+k})$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$F_n(t_1, \dots, t_{n+k})$$
$$G_1(t_1, \dots, t_{n+k})$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$G_s(t_1, \dots, t_{n+k})$$

са дефинирани и притежават непрекъснати частни производни в някое отворено множество W в пространство с $n+k$ измерения. Нека многообразието Γ определено от

$$F_1(t_1, \dots, t_{n+k}) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$F_n(t_1, \dots, t_{n+k}) = 0$$

$$G_\nu(t_1, \dots, t_{n+k}) \geqq 0, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

е компактно и не притежава особени точки. Да означим с Γ_α многообразието определено от

$$F_1(t_1, \dots, t_{n+k}) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$F_n(t_1, \dots, t_{n+k}) = 0$$
$$G_\alpha(t_1, \dots, t_{n+k}) = 0$$
$$G_\nu(t_1, \dots, t_{n+k}) \geqq 0 \quad \nu \neq \alpha.$$

Така определените многообразия Γ_α ще наричаме стени на Γ.

Ние ще предполагаме, че стените също нямат особени точки и, че сечението на всеки две стени има мярка нула относно съответните симетрични интеграли. При тези предположения е валидна следната формула

$$\int\cdots\int_{\Gamma} \frac{D(P_1 \ldots P_k, T_1 \ldots T_m)}{D(t_1 \ldots\ldots t_{n+k})} \frac{dt_{\alpha_1} \ldots dt_{\alpha_k}}{\left|\dfrac{D(T_1 \ldots T_m)}{D(t_{\beta_1} \ldots t_{\beta_m})}\right|}$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{s} \int\cdots\int_{\Gamma_\alpha} P_1 \frac{D(G_\alpha, P_2 \ldots P_k, T_1 \ldots T_m)}{D(t_1, t_2 \ldots\ldots t_{n+k})} \frac{dt_{\gamma_1} \ldots dt_{\gamma_{k-1}}}{\left|\dfrac{D(P, T_1 \ldots T_m)}{D(t_{\delta_1}, t_{\delta_2} \ldots t_{\delta_{m+1}})}\right|}$$

където интегралите трябва да се разбират като съответните симетрични интеграли, а $P_1 \ldots P_k$ са произволни функции с непрекъснати частни производни в W.

Тук ние ще направим едно приложение на тази формула.

Едно от известните доказателства на теоремата на Брауер за неподвижните точки се основава върху следното свойство. Нека

$$f_1(x_1, \ldots x_m, t)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_m(x_1 \ldots x_m, t)$$

са функции с непрекъснати втори частни производни в някое отворено множество W, което съдържа многообразието

$$x_1^2 + \cdots + x_m^2 \leq 1, \quad a \leq t \leq b.$$

Нека частните производни $\frac{\partial f_1}{\partial t}, \ldots \frac{\partial f_m}{\partial t}$ спрямо t са равни на нула върху сферата $x_1^2 + \cdots + x_m^2 = 1$.
В такъв случай интегралът

$$J(t) = \int\cdots\int \frac{D(f_1 \ldots f_m)}{D(x_1 \ldots x_m)} dx_1 \ldots dx_m,$$

разпространен върху сферата $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1$ не зависи от t.

Тази спомагателна теорема представлява главния момент в споменатото доказателство на теоремата на Брауер. Тя не е съвсем тривиална. Ние ще покажем, обаче, че тя лесно следва от нашата редукционна формула. Вместо сфера ние ще вземем ~~[illegible]~~ гладко многообразие дефинирано с неравенството

$$F(x_1,x_2,\dots x_n)\geqq 0$$

където $F(x_1,\dots x_n)$ е функция с непрекъснати частни производни в някое отворено множество. Нека освен това многообразието

$$F(x_1,x_2,\dots x_n)\geqq 0$$

е компактно и върху

$$F(x_1,\dots x_n)=0$$

няма особени точки.

Да разгледаме компактното многообразие Γ определено от

$$F(x_1,\dots x_n)\geqq 0 \qquad t-a\geqq 0 \qquad b-t\geqq 0.$$

Нека $p(t)$ е произволна с непрекъснати производни диференцуема функция при $a\leqq t\leqq b$, за която $p(a)=p(b)=0$.

Да разгледаме интеграла

$$D=\int\dots\int_{\Gamma}\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & p'(t)\\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial t}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \frac{\partial f_n}{\partial t}\end{vmatrix} dx_1\dots dx_n\,dt$$

Да означим с Γ_0 стената $F(x_1,\dots x_n)=0$, с Γ_1 стената $t-a=0$ и с Γ_2 стената $b-t=0$. В такъв случай съгласно нашата формула ще имаме

$$D = -\int\!\!\dots\!\int_{\Gamma_0} p(t) \begin{vmatrix} F'_{x_1} & \dots & F'_{x_n} & 0 \\ f'_{1x_1} & \dots & f'_{1x_n} & f'_{1t} \\ - & - & - & - \\ f'_{nx_1} & \dots & f'_{nx_n} & f'_{nt} \end{vmatrix} \frac{dx_1 \dots dx_{n-1}\, dt}{\left|\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\right|} -$$

$$-\int\!\!\dots\!\int_{\Gamma_1} p(a) \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ f'_{1x_1} & \dots & f'_{1x_n} & f'_{1t} \\ - & - & - & - \\ f'_{nx_1} & \dots & f'_{nx_n} & f'_{nt} \end{vmatrix} dx_1 \dots dx_n -$$

$$-\int\!\!\dots\!\int_{\Gamma_2} p(b) \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ f'_{1x_1} & \dots & f'_{1x_n} & f'_{1t} \\ - & - & - & - \\ f'_{nx_1} & \dots & f'_{nx_n} & f'_{nt} \end{vmatrix} dx_1 \dots dx_n = 0.$$

От друга страна развивайки D получаваме

$$D = \int\!\!\dots\!\int_{\Gamma} p'(t) \frac{D(f_1 \dots f_n)}{D(x_1 \dots x_n)} dx_1 \dots dx_n\, dt = \int_a^b p'(t) J(t)\, dt$$

По такъв начин ние получаваме

$$\int_a^b p'(t) J(t)\, dt = 0.$$

при всеки избор на функцията $p(t)$,която има непрекъсната производна приозводна и удовлетворява условието

$$p(a) = p(b) = 0.$$

Ние знаем,обаче,от една лема на вариационното смятане,че от тук следва,че $J(t)$ е константа.С това доказателството е завършено.