Върху общия диагонален принцип

Я.Тагамлицки

Ще казваме,че един клас Ω от обобщени редици е стабилен, ако той съдържа всяка подредица на редица,която му принадлежи. Ще казваме,че една редица $\{x_\alpha\}$ е нормална относно Ω, ако от всяка нейна подредица $\{x_{\alpha_\beta}\}$ може да се избере подредица $\{x_{\alpha_{\beta_\gamma}}\}$,която принадлежи на Ω .

Теорема /диагонален принцип/. Нека $\{f_\alpha\}$ е обобщена редица от функции с една и съща дефиниционна област M .Ако при всяко фиксирано t от M редицата от функционалните стойности $\{f_\alpha(t)\}$ е нормална относно някой стабилен клас $\Omega^{(t)}$, /който може да зависи от t /,то съществува такава подредица $\{f_{\alpha_\beta}\}$ /чийто избор не зависи от t /,че при всяко t редицата от функционалните стойности $\{f_{\alpha_\beta}(t)\}$ от известно място нататък да принадлежи на $\Omega(t)$.Това значи,че при всяко t има такъв индекс β_t /който може да зависи от t /,че при $\beta>\beta_t$ да имаме $\{f_{\alpha_\beta}(t)\}\in\Omega(t)$.

Пример 1.Нека Ω е класът на монотонните редици от реални числа.Очевидно този клас е стабилен,защото всяка подредица на монотонна редица е пак монотонна,т.е. принадлежи на Ω .От друга страна,ако $\{x_\alpha\}$ е произволна обобщена редица от реални ~~функции~~ числа,ние можем да изберем от нея монотонна подредица.И наистина,нека c е точка на сгъстяване на тази редица / която може да бъде $+\infty$ или $-\infty$ /.Тогава поне едното от ~~неравенствата~~ условията

$$x_\alpha \le c, \quad c \le x_\alpha, \quad c = x_\alpha$$

е изпълнено за произволно големи стойности на α .Нека например е изпълнено за произволно големи стойности на индекса неравенството

$$c \le x_\alpha .$$

Да положим $\beta=(\alpha, x_\alpha)$,където α е избрано така,че да имаме $c \le x_\alpha$.Ще пишем

$$(\alpha_1, x_{\alpha_1}) \prec (\alpha_2, x_{\alpha_2}),$$

ако

$$\alpha_1 < \alpha_2,$$
$$x_{\alpha_1} \geqq x_{\alpha_2} .$$

Да положим $\alpha_\beta = \alpha$. Тогава $\{a_{\alpha_\beta}\}$ е монотонно намаляваща подредица на $\{a_\alpha\}$.

От изложеното се вижда въз основа на диагоналния принцип, че ако $\{f_\alpha\}$ е редица от числови функции с една и съща дефиниционна област, то ние можем да изберем подредица $\{f_{\alpha_\beta}\}$ по такъв начин, че за всяко t редицата от функционалните стойности $\{f_{\alpha_\beta}(t)\}$ да бъде монотонна от известно място нататък.

<u>Пример 2.</u> Нека $\sum$ е метрично пространство и $\rho(x,y)$ е неговият метричен функционал. Ще казваме, че една редица $\{x_\alpha\}$ от точки на $\sum$ е абсолютно фундаментална, ако съвокупността от всичките крайни суми от вида

$$\rho(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}) + \rho(x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}) + \dots + \rho(x_{\alpha_{n-1}}, x_{\alpha_n}),$$

където $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, е ограничена.

Ще покажем, че от всяка фундаментална редица може да се избере абсолютно фундаментална подредица. И наистина, нека $\sum \lambda_\nu$ е сходящ ред с положителни членове. Да положим $\beta = (\alpha, \nu)$, където ν е естествено число и α е индекс на обобщената редица $\{x_\alpha\}$ избран така, че да имаме

$$(1) \qquad \rho(x_\alpha, x_\mu) < \lambda_\nu$$

при $\mu > \alpha$. Ние можем да изберем ν произволно. Тогава (1) ще бъде изпълнено, ако α е достатъчно голямо. Ще пишем

$$(\alpha_1, \nu_1) < (\alpha_2, \nu_2),$$

ако $\alpha_1 < \alpha_2$, $\nu_1 < \nu_2$. Да положим $\alpha_\beta = \alpha$. Тогава $\{a_{\alpha_\beta}\}$ е абсолютно фундаментална подредица на редицата $\{a_\alpha\}$. И наистина, нека $\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n$ и нека $\beta_i = (\alpha_i, \nu_i)$. Тогава

$$\rho(x_{\alpha_{\beta_i}}, x_{\alpha_{\beta_{i+1}}}) = \rho(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_{i+1}}) \leq \lambda_{\nu_i}$$

защото $\alpha_i < \alpha_{i+1}$. По такъв начин имаме

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(x_{\alpha_{\beta_i}}, x_{\alpha_{\beta_{i+1}}}) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_{\nu_i} < \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu$$

защото всеки две от числата $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n$ са различни помежду си.

От изложеното се вижда въз основа на диагоналния принцип, че ако $\{f_\alpha\}$ е обобщена редица от функции с обща дефиниционна област N ,за която при всяко фиксирано t редицата от функционалните стойности $\{f_\alpha(t)\}$ е фундаментална редица от точки в някое метрично пространство /което може да зависи от t /,то може да се избере подредица $\{f_{\alpha_n}\}$ по такъв начин,че за всяко фиксирано t редицата от функционалните стойности $\{f_{\alpha_n}(t)\}$ от известно място нататък да бъде абсолютно фундаментална.