Глобални координатни системи в проективни пространства

Я. Тагамлицки

Една съвокупност M се нарича координатно пространство, ако в нея е зададена фамилия от числови функции. Тази фамилия ще наричаме координатна система. Функционалните стойности на функциите от координатната система ще наричаме координати. Ще казваме, че две точки от M са неотделими/или еквивалентни/, ако те имат едни и същи координати. Ще казваме, че една редица $\{x_\alpha\}$ от точки на M клони към x_0, ако при всеки избор на функцията f от координатната система редицата от числата $\{f(x_\alpha)\}$ клони към $f(x_0)$. Ще казваме, че едно координатно пространство е абстрактно многообразие, ако неговата координатна система е съставена от краен брой функции и изобразява координатното пространство върху съвокупност, която е многообразие в евклидово ~~[illegible]~~ пространство.

Нека P^n е проективното пространство, съставено от системите числа $(t_0, t_1, \dots t_n)$, за които $\sum_{\nu=0}^{n} t_\nu^2 \neq 0$. В такъв случай системата от функциите

$$x_{\alpha\beta} = \frac{t_\alpha t_\beta}{\sum_{\nu=0}^{n} t_\nu^2} \qquad \begin{matrix} \alpha = 0,1,\dots n \\ \beta = 0,1,\dots n \end{matrix}$$

представлява една координатна система за проективното пространство. Тази координатна система разделя точките. Това значи, че две точки са еквивалентни относно координатната система тогава и само тогава, когато те са еквивалентни ~~относно~~ в проективното пространство. Сходимостта относно координатната система е равносилна на сходимостта в обикновения смисъл.

След като е въведена координатна система в проективното пространство можем да поставим въпроса, дали то е абстрактно многообразие. Отговорът на този въпрос е утвърдителен. Въведената координатна система изобразява проективното пространство върху многообразието дефинирано с уравненията

$$x_{\alpha\beta} - t_\alpha t_\beta = 0$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} t_\nu^2 - 1 = 0$$

В тази система от уравнения променливите $X_{\alpha\beta}$ трябва да се разглеждат като пространствени координати,а $t_0, t_1, \ldots, t_n$ като параметри.Тази система няма особености в пространството на текущите координати.За да се убедим в това избираме една точка $t_0, t_1, \ldots t_n$.Без да ограничаваме общността можем да смятаме,че $t_0 \neq 0$.Разглеждаме детерминантата

$$\frac{D(F_1, F_{01}, F_{02} \ldots F_{0n})}{D(t_0, t_1, \ldots t_n)} = (-1)^n t_0^{n-1}(2t_0^2 - 1)$$

Понеже $t_0 \neq 0$,от това заключаваме,че $t_0^2 = \frac{1}{2}$ иследователно

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2 = \frac{1}{2}$$

От тук заключаваме,че някое от числата $t_1, \ldots t_n$ е различно от нула.Без да ограничаваме общността можем да смятаме,че $t_1 \neq 0$ В такъв случай,като повторим разсъжденията,които бяхме направили за t_0 ,намираме,че $t_1 = \frac{1}{2}$.От това следва,че

$$t_2 = t_3 = \ldots = t_n = 0.$$

Разглеждаме сега детерминантата

$$\frac{D(F_{00}, F_1, F_{02} \ldots F_n)}{D(t_0, t_1, \ldots t_n)} = t_0^n t_1 \ldots$$

Тази детерминанта е различна от нула.С това доказателството е завършено.

В комплексното проективно пространство също може да се въведе координатна система.Такава е системата от функциите

$$z_{\alpha\beta} = \frac{t_\alpha \bar{t}_\beta}{\sum_{\nu=0}^{n} t_\nu \bar{t}_\nu}.$$