Тангенциални диференциални оператори върху гладки многообразия

Я. Тагамлицки

Нека в някое отворено множество W на пространството с $p+q$ $(p>0)$ измерения са дадени $n<p+q$ функции $F_1, F_2, \ldots, F_n$ които имат непрекъснати частни производни от първи ред. Нека

$$c=(a_1, a_2, \ldots, a_p; b_1, \ldots b_q)$$

е точка която удовлетворява системата $F_1=0, F_2=0, \ldots, F_n=0 \qquad (\Gamma)$

Системата уравнения

$$\frac{\partial F_1(c)}{\partial x_1}(\xi_1-a_1)+\ldots+\frac{\partial F_1(c)}{\partial x_p}(\xi_p-a_p)+\frac{\partial F_1(c)}{\partial t_1}(\tau_1-b_1)+\ldots+\frac{\partial F_1(c)}{\partial t_q}(\tau_q-b_q)=0$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$\frac{\partial F_n(c)}{\partial x_1}(\xi_1-a_1)+\ldots+\frac{\partial F_n(c)}{\partial x_p}(\xi_p-a_p)+\frac{\partial F_n(c)}{\partial t_1}(\tau_1-b_1)+\ldots+\frac{\partial F_n(c)}{\partial t_q}(\tau_q-b_q)=0$$

където $\xi_1, \ldots \xi_p$ са текущи координати, а $\tau_1, \ldots \tau_q$ са параметри, ще наричаме допирателна в точката $a=(a_1, \ldots a_p)$. Такива допирателни можем да имаме повече от една в зависимост от избора на $(b_1, \ldots b_q)$. Ще казваме, че многообразието няма особеност, ако всичките допирателни имат една и съща размерност. Тогава тази размерност ще наричаме размерност на многообразието (Γ). По такъв начин при нас понятието размерност е дефинирано само за многообразия без особености. Ние ще означаваме размерността с буквата d. Ще казваме, че параметрите на системата имат ранг r, ако r е най-голямото цяло неотрицателно число, за което поне една от детерминантите

$$\frac{D(F_1 \ldots F_n)}{D(t_{\alpha_1} \ldots t_{\alpha_r}, x_{\alpha_{r+1}} \ldots x_{\alpha_n})}(c)$$

е различна от нула. Ние вече отбелязахме, че ще искаме да бъде изпълнено условието $n<p+q$. Освен това ще предполагаме, че поне една от функционалните детерминатни от n-ти ред е различна от нула. В такъв случай рангът r е дефиниран и е свързан с размерността посредством равенството

$$d=p+r-n.$$

Вместо да си служим с понятието ранг, по-добре е да си служим с по-изразителното понятие брой на независимите връзки /или както ще казваме по-накратко, брой на връзки/. Ще предполагаме, че измежду детерминантите

$$(*) \qquad \frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(x_{\alpha_1}, \ldots x_{\alpha_s}, t_{\beta_1}, \ldots t_{\beta_{m-s}})}$$

поне една е различна от нула. Това условие ще изразяваме, като казваме, че ~~системата~~ уравненията

$$(\Gamma) \qquad \begin{array}{l} F_1(x_1, \ldots, x_p; t_1, \ldots t_q) = 0 \\ \text{-----------------} \\ F_m(x_1, \ldots, x_p; t_1, \ldots, t_q) = 0 \end{array}$$

осъществяват m връзки в пространството на променливите $x_1, \ldots, x_p; t_1, \ldots, t_q$. Под брой на връзки, които системата осъществява в пространството на променливите $x_1, x_2, \ldots x_p$ ще разбираме най-малкото число s, за което поне една от детерминантите $(*)$ е различна от нула. Това число ние ще означаваме с s. ~~Xxxxx~~ Размерността дефинираме като разликата на броя на променливите $x_1, \ldots x_p$ и броя на връзките в пространстрото на тези променливи, т.е. ако означим размерността с d ще имаме $d = p - s$.

Да положим

$$\Delta^{i\alpha\beta}(u) = \frac{D(u, F_1, \ldots, F_m)}{D(x_i, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_s}, t_{\beta_1}, \ldots t_{\beta_{m-s}})}$$

и

$$\sigma^2 = \sum_{\alpha, \beta} \left[\Delta^{i\alpha\beta}(x_i)\right]^2$$

Очевидно σ^2 не зависи от i.

Тангенциалните частни производни $D_i(u)$ на една функция u дефинираме по следния начин:

$$D_i(u) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{\alpha, \beta} \Delta^{i\alpha\beta}(x_i)\, \Delta^{i\alpha\beta}(u)$$

Теорема 1. Ако функцията $u(x_1,\dots,x_p;t_1,\dots t_q)$ е константа върху многообразието определено от системата

$$(\Gamma)\qquad \begin{aligned} &F_1(x_1,x_2,\dots,x_p;t_1,\dots,t_q)=0\\ &-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\ &F_m(x_1,x_2,\dots,x_p;t_1,\dots,t_q)=0\end{aligned}$$

то

$$D_i(u)=0 \qquad (i=1,2,\dots,p)$$

Доказателство. Достатъчно е да покажем, че при всеки избор на $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$, $\beta=(\beta_1,\dots\beta_{n-s})$ имаме

$$\Delta^{i\alpha\beta}(x_i)\ \Delta^{i\alpha\beta}(u)=0.$$

~~Ако ... тогава това е очевидно. Също тъй това е очевидно, ако някои от индексите ... или някои са еднакви ... съвпадат. Най-сетне~~ очевиден е случаят, когато $\Delta^{i\alpha\beta}(x_i)=0$. Поради това остава да се разгледа случаят, когато $\Delta^{i\alpha\beta}(x_i)\neq 0$ и следователно никои индекси $i,\alpha_1,\dots,\alpha_s$ не са равни помежду си, както и никои $\beta_1,\dots\beta_{n-s}$ не са равни помежду си. Но в такъв случай ние можем да приложим теоремата за неявните функции, като определим $x_{\alpha_1},\dots x_{\alpha_s}$ и $t_{\beta_1},\dots t_{\beta_{n-s}}$ като функции на останалите променливи. Като диференцирам по x_i получаваме

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_1}{\partial x_{\alpha_1}}\frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial x_i}+\dots+\frac{\partial F_1}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial x_i}+\dots+\frac{\partial F_1}{\partial t_{n-s}}\frac{\partial t_{n-s}}{\partial x_i}=0\\ &-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\\ &\frac{\partial F_m}{\partial x_i}+\frac{\partial F_m}{\partial x_{\alpha_1}}\frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial x_i}+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial x_i}+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial t_{n-s}}\frac{\partial t_{n-s}}{\partial x_i}=0\end{aligned}$$

Обаче като вземем под внимание, че функцията u е константа върху (Γ) намираме

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{\partial F_1}{\partial x_{\alpha_1}}\frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial x_i}+\quad+\frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{\partial t_1}{\partial x_i}+\quad+\frac{\partial u}{\partial t_{n-s}}\frac{\partial t_{n-s}}{\partial x_i}=0.$$

Това ни дава възможност да заключим, че детерминантата от коефициентите на системата уравнения (1) и (2) е нула, т.е.

$$\Delta^{i\alpha\beta}(u)=0.$$

Теорема 2. Ако u и v са две гладки функции, дефинирани в W, като при това функцията v не зависи от параметрите, то

$$\sum_{i=1}^{p} D^{i}(u)\, D^{i}(v) = \sum_{i=1}^{p} D^{i}(u)\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

Теорема 3.

$$D^{i}(u) = \sum_{\lambda} D^{i}(x_\lambda)\frac{\partial u}{\partial x_\lambda} + \sum_{\mu} D^{i}(t_\mu)\frac{\partial u}{\partial t_\mu}.$$

Доказателство. Развиваме $D^{i}(u)$ по първия ред. Това ни дава

$$D^{i}(u) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma} \Delta^{i\alpha\beta}(x_i)\frac{\partial u}{\partial x_\gamma}\Delta^{i\alpha\beta}(x_\gamma) + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma} B^{i\alpha\beta}_{(x_i)}\frac{\partial u}{\partial t_s} B^{i\alpha\beta}(t_s)$$

В това развитие полагаме $u = x_\lambda$ и $u = t_\mu$.

Теорема 4.

$$\sum_{i=1}^{p} D^{i}(x_\lambda)\, D^{i}(x_\mu) = D^{\mu}(x_\lambda), \quad \sum D^{i}(t_\lambda)\, D^{i}(x_\mu) = D^{\mu}(t_\lambda)$$

Доказателство. Прилагаме теорема 2 като полагаме

$u = x_\lambda$, $v = x_\mu$ и $u = t_\lambda$, $v = x_\mu$

Теорема 5.

$$D^{\mu}(x_\lambda) = D^{\lambda}(x_\mu)$$

Доказателство. Прилагаме теорема 4.

Теорема 6. Матрицата

$$P = \left(D^{\mu}(x_\lambda) \right)$$

е проекционна, ~~жж~~ т.е. $P^2 = P$

Доказателство. Прилагаме теорема 4.