Многообразия с постоянна размерност

Я. Тагамлицки

Да разгледаме системата

$$(1)\qquad \begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \dots x_p; t_1, \dots t_q) = 0 \\ &\text{-------------} \\ &F_m(x_1, x_2, \dots x_p; t_1, \dots t_q) = 0, \end{aligned}$$

където функциите $F_1, \dots, F_m$ са дефинирани в някое отворено множество W на пространството с $p+q$ измерения и имат непрекъснати първи частни производни. Нека $a = (b_1, \dots b_p; c_1, \dots c_q)$ е една точка от W. Линейната и хомогенна ситема

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial F_1(a)}{\partial x_1}\lambda_1 + \dots + \frac{\partial F_1(a)}{\partial x_p}\lambda_p + \frac{\partial F_1(a)}{\partial t_1}\mu_1 + \dots + \frac{\partial F_1(a)}{\partial t_q}\mu_q = 0 \\ &\text{-------------------------} \\ &\frac{\partial F_m(a)}{\partial x_1}\lambda_1 + \dots + \frac{\partial F_m(a)}{\partial x_p}\lambda_p + \frac{\partial F_m(a)}{\partial t_1}\mu_1 + \dots + \frac{\partial F_m(a)}{\partial t_q}\mu_q = 0 \end{aligned}$$

в която $\mu_1, \dots, \mu_q$ са параметри ще наричаме тангенциална система за точката a независимо от това, дали тази точка удовлетворява или не системата (1). Размерността на линейното пространство съставено от векторите $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, за които могат да се намерят числа $(\mu_1, \dots, \mu_q)$ така, че системата (2) да се удовлетворява, ще означаваме с $d(a)$ и ще наричаме чиста размерност /или накратко само размерност/. Размерността на линейното пространство на решенията $(\lambda_1, \dots \lambda_p; \mu_1, \dots \mu_q)$ на системата (2) ще означаваме с $b(a)$ и ще наричаме брутна размерност. Размерността на линейното пространство на решенията на системата

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial F_1(a)}{\partial t_1}\mu_1 + \dots + \frac{\partial F_1(a)}{\partial t_q}\mu_q = 0 \\ &\text{-------------} \\ &\frac{\partial F_m(a)}{\partial x_1}\mu_1 + \dots + \frac{\partial F_m(a)}{\partial t_q}\mu_q = 0 \end{aligned}$$

ще означаваме* с $e(a)$ и ще наричаме ексцес. От линейната алгебра знаем, че

$$d = b - e$$

Числото

$$k = p + q - n$$

ще наричаме индекс или псевдоразмерност. Индексът може да се

---

* Често за краткост вместо $d(a)$, $b(a)$ и $e(a)$ ще пишем само d, b и e.

да се дефинира разбира се и като разликата $b - b^*$,където b^* е размерността на системата,която е транспонирана на системата (2) .

Нека m е рангът на системата 2 .Както знаем имаме $b = p + q - m$. ~~Нека~~ Понякога ще наричаме ранга b още и брутен ранг за разлика от чистия ранг,който сега ще дефинираме. Нека

$$(4) \qquad \frac{D(F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \dots, F_{\alpha_m})}{D(x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_r}; t_{\gamma_1}, \dots t_{\gamma_{m-r}})}(a) \neq 0$$

Най-малкото число r ,за което е изпълнено условието (4) ще наричаме чист ранг на системата (2) и ще го означаваме с $r(a)$ или накратко с r .

<u>Теорема 1.</u> Имаме

$$(5) \qquad d = p - r$$

/ Това разбира се е вярно за всяка линейна система,а не само за тангенциални системи /.

<u>Доказателство.</u> Без да ограничаваме общността можем да смятаме,че

$$\alpha_1 = 1, \dots, \alpha_m = m; \ \beta_1 = 1, \dots, \beta_r = r; \ \gamma_1 = 1, \dots, \gamma_{m-r} = m - r$$

Да разгледаме първо случая,когато $r \neq 0$.

Като решим системата (2) по формулите на Крамер намираме

$$\lambda_1 = - \frac{\sum_{\sigma=r+1}^{p} \lambda_\sigma \frac{D(F_1, \dots F_m)}{D(x_\sigma, x_2, \dots x_r, t_1, \dots t_{m-r})}(a) + \sum_{\tau=m-r+1}^{q} \mu_\tau \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(t_\tau, x_2, \dots, x_r, t_1, \dots t_{m-r})}(a)}{\frac{D(F_1, F_2, \dots F_m)}{D(x_1, x_2, \dots x_r, t_1 \dots t_{m-r})}(a)}$$

Като вземем под внимание минималността на чистия ранг r заключаваме,че

$$\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(t_\tau, x_2, \dots, x_r, t_1, \dots, t_{m-r})}(a) = 0 , \qquad (\tau = m - r + 1, \dots q),$$

защото в тези детерминанти броят на пространствените променливи $x_2, \dots, x_r$ е по-малък от r .

Аналогично намираме
По такъв начин получаваме

$$(6) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= A_{11}\lambda_{r+1} + \dots + A_{1p-r}\lambda_p \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_r &= A_{r1}\lambda_{r+1} + \dots + A_{rp-r}\lambda_p \end{aligned}$$

и освен това имаме разбира се

$$(7) \quad \begin{aligned} t_1 &= B_{11}\lambda_{r+1} + \dots + B_{1p-r}\lambda_p + C_{11}\mu_{m-r+1} + \dots + C_{1q+r-m}\mu_q \\ &\dots\dots\dots\dots \\ t_{m-r} &= B_{m-r1}\lambda_{r+1} + \dots + B_{m-rp-r}\lambda_p + C_{m-r1}\mu_{m-r+1} + \dots + C_{m-rq+r-m}\mu_q \end{aligned}$$

където с $A_{11}, \dots, B_{11}, \dots C_{11}, \dots$ са означени съответните коефициенти. Системата (2), както знаем от линейната алгебра е еквивалентна на системата от уравненията (6) и (7). Този резултат по очевидни съображения е валиден и при $r = 0$. Пълното решение на системата уравнения (6) и (7) се получава, като даваме на $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_p, t_{m-r}, \dots t_q$ произволни стойности. По такъв начин виждаме, че размерността d е равна на броя на променливите $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_p$ и следователно

$$d = p - r$$

С това формулата (5) е доказана. Същевременно като вземем под внимание, че системата (3) е еквивалентна на системата

$$\begin{aligned} \mu_1 &= C_{11}\mu_{m-r+1} + \dots + C_{1q+r-m}\mu_q \\ &\dots\dots\dots\dots \\ t_{m-r} &= C_{m-r1}\mu_{m-r+1} + \dots + C_{1q+r-m}\mu_q \end{aligned}$$

получаваме и известната формула

$$d = b - e$$

за която споменахме по-горе.

<u>Дефиниция.</u> Ще казваме, че системата (1) удовлетворява условията за постоянна размерност, ако $b(a)$ не се мени, когато a описва W и $d(a)$ не се мени, когато a се изменя така, че удовлетворява системата (1).

Нека системата (1) удовлетворява условията за [illegible] постоянна размерност, и нека

$$(10)\qquad \frac{D(F_1,F_2,\dots,F_m)}{D(x_1\dots x_r,\ t_1,\dots t_{m-r})}(a)\neq 0$$

където $r=r(a)$ и a удовлетворява системата (1).
Като проложим теоремата за съществуване на неявни [illegible] [illegible] функции към първите m уравнения получаваме

$$(8)\qquad \begin{aligned} x_1&=\varphi_1(x_{r+1},\dots,x_p;t_{m-r+1},\dots t_q)\\ &\dots\dots\dots\\ x_r&=\varphi_r(x_{r+1},\dots,x_p;t_{m-r+1},\dots,t_q)\\ t_1&=\psi_1(x_{r+1},\dots x_p;t_{m-r+1},\dots,t_q)\\ &\dots\dots\\ t_{m-r}&=\psi_{m-r}(x_{r+1},\dots x_p;t_{m-r+1},\dots,t_q). \end{aligned}$$

Като вземем под внимание, че r не се мени в W заключаваме, че функциите (8) удовлетворяват и останалите [illegible] уравнение на системата (1). Сега ще покажем, че функциите $\varphi_1,\dots,\varphi_r$ не зависят от параметрите $t_{m-r+1},\dots,t_q$. За да докажем това ще използуваме, че d не се мени, когато съответните точки се [illegible] изменя така, че да удовлетворява системата (1). И наистина, като заместим функциите (8) в (1) и диференцираме по t_δ, където $\delta=m-r+1,\dots,q$, получаваме линейната система

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_\delta}+\dots+\frac{\partial F_1}{\partial x_r}\frac{\partial\varphi_r}{\partial t_\delta}+\frac{\partial F_1}{\partial t_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial t_\delta}+\dots+\frac{\partial F_1}{\partial t_{m-r}}\frac{\partial\psi_{m-r}}{\partial t_\delta}+\frac{\partial F_1}{\partial t_\delta}=0\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\frac{\partial F_m}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_\delta}+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial x_r}\frac{\partial\varphi_r}{\partial t_\delta}+\frac{\partial F_m}{\partial t_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial t_\delta}+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial t_{m-r}}\frac{\partial\psi_{m-r}}{\partial t_\delta}+\frac{\partial F_m}{\partial t_\delta}=0 \end{aligned}$$

~~относно производните~~ . Оттук намираме

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_\delta}=-\frac{\dfrac{D(F_1,F_2,\dots F_m)}{D(t_\delta,x_2\dots x_r;t_1,\dots t_{m-r})}(s)}{\dfrac{D(F_1,\dots F_m)}{D(x_1,\dots x_r;t_1,\dots t_{m-r})}(s)},$$

където $s=(\varphi_1,\dots,\varphi_r,x_{r+1},\dots x_p,t_1,\dots t_{m-r},t_{m-r+1},\dots t_q)$

От друга страна, като вземем под внимание формулата (5) и условието за постоянна размерност, намираме $r(s)=r(a)=r$, защото s удовлетворява системата (1).
Оттук заключаваме, че

$$\frac{D(F_1,F_2,\dots,F_m)}{D(t_\delta,x_2,\dots x_r;t_1,\dots t_{m-r})}(s)=0$$

защото в тази детерминанта броят на пространствените променливи $x_2,\dots x_r$ е по-малък от чистия ранг $r=r(s)$.

По такъв начин получаваме $\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_s} = 0$. Аналогично намираме $\frac{\partial \varphi_2}{\partial t_s} = 0, \ldots, \frac{\partial \varphi_r}{\partial t_s} = 0$.

От изложеното виждаме, че при направените предположения имаме

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \varphi_1(x_{r+1}, \ldots, x_p) \\
&\ldots \\
x_r &= \varphi_r(x_{r+1}, \ldots, x_p) \\
t_1 &= \psi_1(x_{r+1}, \ldots x_p, t_{m-r+1}, \ldots, t_q) \\
&\ldots \\
t_{m-r} &= \psi_{m-r}(x_{r+1}, \ldots x_p, t_{m-r+1}, \ldots, t_q).
\end{aligned}
$$

Системата ще наричаме каноничен клон на системата (1) . По такъв начин ние показахме, че за всяка точка a , която удовлетворява системата (1) има каноничен клон който удовлетворява условията

$$
\begin{aligned}
b_1 &= \varphi_1(b_{r+1}, \ldots, b_p) \\
&\ldots \\
b_r &= \varphi_r(b_{r+1}, \ldots, b_p) \\
c_1 &= \psi_1(b_{r+1}, \ldots, b_p, c_{m-r+1}, \ldots c_q) \\
&\ldots \\
c_{m-r} &= \psi_{m-r}(b_{r+1}, \ldots, b_p, c_{m-r+1}, \ldots, c_q)
\end{aligned}
$$

Да видим при какви условия псевдоразмерността k е равна на чистата размерност d . От линейната алгебра знаем, че

$$b = p + q - m$$

От друга страна видяхме, че $d = b - e$, следователно $k = d$ е изпълнено тогава и само тогава, когато

$$r = m + e .$$

Специално, ако рангът m е максимален, т.е. $r = m$ то $k = d$ тогава и само тогава, когато $e = 0$.

Като вземем под внимание, че $d = p - r$, заключаваме, че $k = d$ е вярно тогава и само тогава, когато

$$q = m - r$$

Ще споменем, че рангът на системата (3) , която ще наричаме система на ексцеса, е очевидно $q - e$.

В заключение ще кажем, че от $b = p + q - m$, $d = b - e$ и $d = p - r$ следва

$$e = q + r - m$$

и сл. за да имаме $e = 0$ е необходимо и достатъчно да имаме $q = m - r$, което е изпълнено тогава и само тогава, когато в детерминантата (4) участвуват всичките параметри.