Някои приложения на общия диагонален принцип

от Я.Тагамлицки

Ще казваме,че е дадена една стабилна класа Σ от обобщени редици,ако заедно със всяка принадлежаща на нея обобщена редица $\{x_\alpha\}$ класата Σ съдържа и всяка подредица на $\{x_\alpha\}$.Като пример може да ни служи класата на сходящите редици.Тя очевидно е стабилна.Друг пример ни дава класата на монотонните редици.

Нека е дадена една стабилна класа Σ .Ще казваме,че една обобщена редица $\{x_\alpha\}$ е нормална /или напълно ограничена/ относно Σ ,ако от всяка подредица $\{x_{\alpha_\beta}\}$ може да се избере подподредица $\{x_{\alpha_{\beta_\gamma}}\}$,която принадлежи на Σ .

Диагонален принцип. Нека $\{f_\alpha\}$ е една обобщена редица от функции с една и съща дефиниционна област M .Ако при всяко $t \in M$ редицата от функционалните стойности $\{f_\alpha(t)\}$ е нормална относно някоя стабилна класа Σ_t /която може евентуално да зависи от t /,то можем да изберем независеща от t подредица $\{f_{\alpha_\beta}\}$ по такъв начин,че за всяко $t \in M$ от известно /изобщо зависещо от t / място нататък да имаме

$$\{f_\alpha(t)\} \in \Sigma_t .$$

1.Приложение. Нека в някое пространство Ω е дадена някаква система $\mathcal{L}$ от подмножества на Ω ,които ще наричаме отворени.Системата $\mathcal{L}$ не е задължена да образува топология.Нека ни е дадена обобщена редица $\{x_\alpha\}$ от точки на Ω ,която има точка на сгъстяване относнно $\mathcal{L}$.В общия случай ние не можем да изберем сходяща подредица от $\{x_\alpha\}$ защото системата $\mathcal{L}$ не е задължена да бъде топология.Обаче валидна е следната теорема.

Ако всяка подредица на $\{x_\alpha\}$ има точка на сгъстяване относно $\mathcal{L}$,то от $\{x_\alpha\}$ може да се избере сходяща подредица.

Доказателство. Нека V е някое множество от $\mathcal{L}$.Ще пишем $f_\alpha(V)=1$,ако $x_\alpha \in V$ и $f_\alpha(V)=0$,ако $x_\alpha \bar{\in} V$. Да означим с Σ класата на стационерните редици.Това очевидно е една стабилна класа.Да разгледаме редицата $\{f_\alpha\}$ При всяко фиксирано V редицата от функционалните стойноссти $\{f_\alpha(V)\}$ е нормална относно Σ ,защото членовете на тази редица приемат само краен брой стойности.Съгласно диагогоналния принцип можем да изберем подредица $\{f_{\alpha_\beta}\}$ така,че при всяко V редицата от функционалните стойности $\{f_{\alpha_\beta}(V)\}$ да бъде от известно място нататък стационерна. Да разгледаме подредицата $\{x_{\alpha_\beta}\}$. Съгласно предположението тя има някоя точка на сгъстяване c. Ще покажем, че подредицата $\{x_{\alpha_\beta}\}$ клони към c. И наистина, нека V_0 е множество от L което съдържа c. Тогава има произволно големи индекси за които $x_{\alpha_\beta} \in V_0$ и следователно $f_{\alpha_\beta}(V_0)=1$. Но редицата $\{f_{\alpha_\beta}(V_0)\}$ от известно място нататък е стационерна и следователно от известно място нататък $f_{\alpha_\beta}(V_0)=1$, т.е. $x_{\alpha_\beta} \in V_0$. С това доказателството е завършено.

2. __Приложение__. Ще казваме, че едно подмножество B на някое топологично пространство е напълно ограничено, ако от всяка обобщена редица от точки на B може да се избере сходяща подредица /която не е задължена да клони към граница от B /. При тази дефиниция е валидна следната теорема.

Ако $\{f_\alpha\}$ е обобщена редица от функции с една и съща дефиниционна област M, ~~за~~ които при всяко фиксирано $t \in M$ приемат стойности от някое напълно ограничено множество /което може да зависи от t /, то можем да изберем подредица $\{f_{\alpha_\beta}\}$ така, че при всяко фиксирано t редицата от функционалните стойности $\{f_{\alpha_\beta}(t)\}$ да бъде сходяща.

Тази теорема е очевидно следствие от диагоналния принцип. Тук теоремата на Тихонов не е приложима, защото затворената обвивка на напълно ограничено множество не е задължена да бъде компактна.

3. __Приложение__. Нека $\{f_\alpha\}$ е обобщена редица от функции, с една и съща дефиниционна област M, чиито стойности са реални числа. В такъв случай можем да изберем подредица, която при всяко фиксирано t от известно място нататък е монотонна.

И наистина, за да можем да приложим диагоналния принцип, достатъчно е да покажем, че от всяка обобщена числова редица $\{x_\alpha\}$ можем да изберем монотонна подредица. Това можем да видим по следния начин. Нека c е точка на сгъстяване на редицата $\{x_\alpha\}$. Случаите $c=\pm\infty$ също се допускат. Ако имаме произволно големи индекси, за които $x_\alpha = c$, то можем да изберем стационерна подредица. С това монотонна подредица е избрана. Ако нямаме този случай, то или имаме произволно големи индекси α ,за които $x_\alpha < c$,или имаме произволно големи индекси,за които $c < x_\alpha$.Да разгледаме първия случай.За всеки индекс α ,за който $x_\alpha < c$ ще положим $\beta = (\alpha, x_\alpha)$.Ще пишем $(\alpha_1, x_{\alpha_1}) < (\alpha_2, x_{\alpha_2})$,когато $\alpha_1 \leqq \alpha_2$, $x_{\alpha_1} \leqq x_{\alpha_2}$. По такъв начин съвокупността от двойките $\beta = (\alpha, x_\alpha)$ се превръща в насочена вдясно система. За всяка двойка $\beta = (\alpha, x_\alpha)$ ще положим $\alpha_\beta = \alpha$.По такъв начин получаваме подредица α_β , за която x_{α_β} монотонно расте. Вторият случай се разглежда аналогично.Това е достатъчно,за да приложим диагоналния принцип.

В разгледания случай съще не може да се приложи теоремата на Тихонов,защото монотонността не е топологична сходимост.

4. Приложение. От диагоналния принцип по очевиден начин следва теоремата на Тихонов.

След тези няколко приложения ще изложим доказателството на диагоналния принци.

Нека $\{f_\alpha\}$ е обобщена редица от функции,дефинирани в някое множество M .Да означим с A насочената система от индексите α .Нека при всяко фиксирано $t \in M$ редицата от функционалните стойности $\{f_\alpha(t)\}$ е нормална относто стабилната класа Σ_t .

Да наредим множеството M добре и да добавим към така получената трансфинитна редица още един елемент t_0 ,който не принадлежи на M .Така получаваме редицата

$$t_0, t_1, t_2, \ldots, t_\omega, t_{\omega+1}, \ldots$$

Ще дефинираме по индукция за всеки трансфинитен индекс z една насочена система B_z ,за всеки два трансфинитни индекса x, y ,за които $x \leqq y$,ще дефинираме една функция ρ_{xy} и най-сетне за всеки трансфинитен индекс z ще дефинираме една функция ψ_z .Това става по следния начин.Полагаме

$$B_0 = A \;, \quad \rho_{00}(\alpha) = \alpha .$$

Нека B_y и $\rho_{xy}(\beta)$ са дефинирани при $y < p$.За да ги дефинираме при $y = p$ разглеждаме двойките

$$\sigma = (y, \beta), \text{ където } y < p, \; \beta \in B_y .$$

Ще пишем

$$(t_1,\beta_1) \leqq (t_2,\beta_2)$$

когато $t_1 \leqq t_2$, $y_1 \leqq \rho_{t_1 t_2}(\beta_2)$. По такъв начин множеството от двоките σ се превръща в насочена система. Полагаме

$$\psi_x(\sigma) = \rho_{xy}(\beta)$$

при $x \leqq y$, където $\sigma = (y,\beta)$. При фиксирано x функцията $\psi_x(\sigma)$ расте монотонно и неограничено. Да разгледаме $\psi_0(\sigma)$. Стойностите на тази функция принадлежат на $B_0 = A$ и следователно $\{f_{\psi_0(\sigma)}(\xi)\}$ е подредица на $\{f_\alpha(\xi)\}$. Обаче последната редица е нормална относно класата Σ_{t_p} и следователно можем да изберем подредица $f_{\psi_0(\sigma_\gamma)}(t_p)$, която принадлежи на Σ_{t_p}. Нека означим с Γ насочената система, която се описва от γ.

След всичко направено полагаме $B_p = \{t_0\} \cup \Gamma$, като смятаме t_0 за най-малък елемент в B_p. По-нататък дефинираме $\rho_{xp}(\beta)$ в B_p така. Ако β съвпада с някой елемент γ от Γ, то пишем $\sigma_\gamma = (y_\gamma, \beta_\gamma)$ и ако освен това $x \leqq y_\gamma$, полагаме

$$\rho_{xp}(\beta) = \rho_{x y_\gamma}(\beta_\gamma).$$

Ако ли пък $\beta = t_0$, или нямаме $x \leqq y_\gamma$, то полагаме $\rho_{xp}(\beta) = t_0$. С това индуктивната дефиниция е дадена. От тази дефиниция следват следните леми

<u>Лема 1.</u> $x \leqq y \leqq z$, $\beta \in B_z$ и $\rho_{yz}(\beta) \neq t_0$, то

$$\rho_{xy}(\rho_{yz}(\beta)) = \rho_{xz}(\beta)$$

<u>Лема 2.</u> $x \leqq y \leqq z$, $\sigma = (z,\beta)$, $\beta \in B_z$, то

$$\rho_{xz}(\beta) = \rho_{xy}(\rho_{yz}(\beta)) = \rho_{xy}(\psi_y(\sigma)).$$

След всичко направено непосредствено се проверява, че при всяко $t \in M$ имаме от известно място нататък

$$\{f_{\psi_0(\sigma)}(t)\} \in \Sigma_t .$$

С това доказателството е завършено.

Диагоналния принцип може да се обобщи за редици от по-висок ред по следния начин.Ще казваме,че едно множество A с частична наредба /за която искаме да бъде само транзитивна и рефлективна,но не непременно антисиметрична/ е насочена вдясно система от първи ред,ако всяко изброимо подмножество на A има горна граница и всяка обикновена монотонно растяща редица от точки на A има точна горна граница.Ще казваме,че $\{X_\alpha\}$ е обобщена редица от първи ред,ако X_α е функция,чийто аргумент описва насочена система от първи ред .Обобщените редици,които разглеждахме досега ще наричаме редици от ~~първи ред~~ нулев ред за разлика от редиците от първи ред.

Ще казваме,че $\{X_{\alpha_\beta}\}$ е подредица на редицата от първи ред $\{X_\alpha\}$,ако α_β е монотонно и неограничено растяща функция,чийто аргумент описва някаква насочена вдясно система от първи ред B и която удовлетворява следното условие за непрекъснатост.Ако $\beta_1, \beta_2, \ldots$ е монотонно растяща редица от точка на B и β_0 е коя да е точна горна граница на тази редица,то α_{β_0} е точна горна граница за редицата

$$\alpha_{\beta_1}, \alpha_{\beta_2}, \alpha_{\beta_3}, \ldots$$

Диагоналният принцип е валиден и за редици от първи ред.Доказателството се извършва по същия начин със следното допълнение.Множествата B_z ,които ние дефинирахме, са насочени системи от нулев ред.Ние разширяваме тези множества до насочени системи от първи ред,като разглеждаме монотонно растящи редици от техни елементи.

Като пример на насочена вдясно система от първи ред може да ни служи съвкупността на изброимите подмножества на някое множество,наредена по включване.Като друг пример може да ни служи съвкупността от изброимите трансфинитни числа.

Разбира се тези разглеждания могат по очевиден начин да се обобщят за редици от произволен ред.