Обобщени уравнения на Коши-Риман за многообразия с постоянен ранг.

Я. Тагамлицки

Нека в някое отворено множество W на пространство с $p+q$ измерения е дадена система

$$(1)\quad \begin{array}{l} F_1(x_1,\dots,x_p;\, t_1,\dots,t_q)=0 \\ \text{-----------------} \\ F_m(x_1,\dots x_p;\, t_1,\dots,t_q)=0 \end{array}$$

от гладки уравнения, която в W има постоянен ранг m. Променливите $x_1,\dots,x_p$ ще провъзгласим за пространствени променливи, а $t_1,\dots,t_q$ за параметри. Съвокупността от точките $(x_1,\dots x_p;\, t_1,\dots t_q)$ от W, които удовлетворяват системата (1) ще наричаме брутна графика на тази система, а съвокупността от точките $(x_1,\dots,x_p)$ за които може да се намерят ~~точка~~ $(t_1,\dots t_q)$ по такъв начин, че точката $(x_1,\dots x_p;\, t_1,\dots,t_q)$ да принадлежи на W и да удовлетворява системата (1) ще наричаме чиста графика на тази система. Под многообразие с постоянен ранг ще разбираме чистата графика на система с постоянен ранг.

Нека $c=(a_1,\dots,a_p;\, b_1,\dots b_q)$ е точка от W. Системата

$$(2)\quad \begin{array}{l} \dfrac{\partial F_1(c)}{\partial x_1}\lambda_1+\dots+\dfrac{\partial F_1(c)}{\partial x_p}\lambda_p+\dfrac{\partial F_1(c)}{\partial t_1}\mu_1+\dots+\dfrac{\partial F_1(c)}{\partial t_q}\mu_q=0 \\ \text{-----------------------------} \\ \dfrac{\partial F_m(c)}{\partial x_1}\lambda_1+\dots+\dfrac{\partial F_1(c)}{\partial x_p}\lambda_p+\dfrac{\partial F_m(c)}{\partial t_1}\mu_1+\dots+\dfrac{\partial F_m(c)}{\partial t_q}\mu_q=0 \end{array}$$

ще наричаме тангенциална система за точката c. Размерността на пространството от решенията $(\lambda_1,\dots,\lambda_p;\mu_1,\dots\mu_q)$ ще наричаме брутна размерност и ще означаваме с буквата b. Съгласно правилото на Руше имаме $b=p+q-m$ и следователно b не зависи от c. Размерността на пространството от векторите $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$, за които може да се намерят ~~вектор~~ $(\mu_1,\dots,\mu_q)$ така, че да са изпълнени уравненията (9) ще наричаме чиста размерност. Чистата размерност може евентуално да зависи от c.

5

Една точка от брутната графика ще наричаме обикновена, ако около нея може да се избере околност U по такъв начин, че за всяка точка c от брутната графика, която принадлежи на U, чистата размерност да има една и съща стойност.

Най-малкото число r, за което имаме

$$\frac{D(F_{\alpha_1},\dots,F_{\alpha_m})}{D(x_{\beta_1},\dots,x_{\beta_r},t_{\gamma_1},\dots,t_{\gamma_{m-r}})}(c)\neq 0$$

ще наричаме чист ранг за точката c.

Лема 1. Във всяко отворено подмножество V на W, което съдържа поне една точка от брутната графика има ~~xxxxxx~~ точка от брутната графика, която има съдържаща се в V околност, в която всичките точки от брутната графика имат един и същ чист ранг.

Доказателство. Нека c_0 е точка от брутната графика, която принадлежи на V и в която чистият ранг има минимална стойност върху частта от брутната графика, която се съдържа в V. Тогава някоя функционална детерминанта

$$(3)\qquad \frac{D(F_{\alpha_1},\dots,F_{\alpha_m})}{D(x_{\beta_1},\dots,x_{\beta_r},t_{\gamma_1},\dots t_{\gamma_{m-r}})}$$

е различна от нула в точката c_0 и следователно ще бъде различна от нула и в някоя околност U на c_0. Можем да смятаме очевидно, че $U\subset V$. Нека $r(c)$ е чистият ранг в някоя точка c, която принадлежи на U и на брутната графика. Тъй като детерминантата (3) е различна от нула в точката c, то $r(c)\leqq r$. От друга страна като вземем под внимание минималността на r, заключаваме, че $r\leqq r(c)$. По такъв начин имаме $r(c)=r$.

Лема 2. Нека c е точка от брутната, в някоя околност U на която чистият ранг има постоянна стойност r върху брутната графика. Нека

$$\frac{D(F_1,\dots F_m)}{D(x_1,\dots x_r,t_1,\dots t_{m-r})}(c)\neq 0.$$

Тогава в някоя околност L на точката $(a_{r+1},\dots a_p; b_{m-r+1},\dots b_q)$ съществуват гладки функции

$$\begin{aligned}
x_1 &= f_1(x_{r+1},\dots x_p)\\
&\text{-----}\\
x_r &= f_r(x_{r+1},\dots x_p)\\
t_1 &= g_1(x_{r+1},\dots x_p; t_{m-r+1},\dots,t_q)\\
&\text{-----}\\
t_{m-r} &= g_{m-r}(x_{r+1},\dots x_p; t_{m-r+1},\dots,t_q)
\end{aligned}$$

чиято графика не напуска W ,които удовлетворяват уравненията

$$F_1(f_1,\dots,f_r,x_{r+1},\dots x_p;g_1,\dots g_{m-r},t_{m-r+1},\dots t_q)=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_m(f_1,\dots f_r,x_{r+1},\dots x_p;g_1,\dots g_{m-r},t_{m-r+1},\dots t_q)=0$$

и за които имаме

$$a_1=f_1(a_{r+1},\dots a_p)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_r=f_r(a_{r+1},\dots a_p)$$
$$b_1=g_1(a_{r+1},\dots a_p;b_{m-r+1},\dots b_q)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$b_{m-r}=g_{m-r}(a_{r+1},\dots a_p;b_{m-r+1},\dots b_q).$$

<u>Доказателство</u>. Теоремата за съществуване на неявните функции ни дава

$$x_1=f_1(x_{r+1},\dots x_p;t_{m-r+1},\dots t_q)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_r=f_r(x_{r+1},\dots x_p;t_{m-r+1},\dots t_q)$$
$$t_1=g_1(x_{r+1},\dots x_p;t_{m-r+1},\dots t_q)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$t_{m-r}=g_{m-r}(x_{r+1},\dots x_p;t_{m-r+1},\dots t_q).$$

Тези функции удовлетворяват не само уравненията

$$F_1=0,\ \dots,\ F_m=0,$$

но и останалите уравнения. В това се убеждаваме като диференцираме уравненията и вземем под внимание, че рангът е постоянен. По такъв начин всичко ще бъде доказано, ако установим, че функциите

$$f_1,\ f_2,\ \dots\ f_r$$

не зависят от $t_{m-r+1},\dots,t_q$. За тази цел ще бъде достатъчно да покажем, че производните им спрямо t_α, $(\alpha=m-r+1,\dots t_q)$ са нули.
Да разгледаме например $\frac{\partial f_1}{\partial t_\alpha}$. Като диференцираме уравненията

$$F_1(f_1,\dots f_r,x_{r+1},\dots x_p;g_1,\dots g_{m-r},t_{m-r+1},\dots t_q)=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F_m(f_1,\dots f_r,x_{r+1},\dots x_p;g_1,\dots g_{m-r},t_{m-r+1},\dots t_q)=0$$

получаваме

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial t_\alpha}+\dots+\frac{\partial F_1}{\partial x_r}\frac{\partial f_r}{\partial t_\alpha}+\frac{\partial F_1}{\partial t_1}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial t_\alpha}+\dots+\frac{\partial F_1}{\partial t_{m-r}}\cdot\frac{\partial g_{m-r}}{\partial t_\alpha}+\frac{\partial F_1}{\partial t_\alpha}=0$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial x_1}\frac{\partial f_1}{\partial t_\alpha}+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial x_r}\frac{\partial f_r}{\partial t_\alpha}+\frac{\partial F_m}{\partial t_1}\frac{\partial g_1}{\partial t_\alpha}+\dots+\frac{\partial F_m}{\partial t_{m-r}}\frac{\partial g_{m-r}}{\partial t_\alpha}+\frac{\partial F_m}{\partial t_\alpha}=0$$

$\alpha=m-r+1,\dots,q$

Оттук формулите на Крамер ни [redacted] дават

$$\frac{\partial f_1}{\partial t_\alpha}=-\frac{\dfrac{D(F_1 - - - - - - - F_m)}{D(t_\alpha\, x_2,\dots x_r\, t_{m-r+1}\dots t_q)}}{\dfrac{D(F_1 - - - - - F_m)}{D(x_1, x_2 \dots x_r\, t_{m-r+1}\dots t_q)}}$$

Ако допуснем,че в някоя точка имаме $\frac{\partial f_1}{\partial t_\alpha}\neq 0$,то в тази точка ще имаме

$$\frac{D(F_1 - - - - - - F_m)}{D(t_\alpha, x_2, \dots x_r, t_{m-r+1}\dots t_q)}\neq 0$$

и следователно чистият ранг в съответната точка от брутната графика ще бъде xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx най-много $r-1$,което противоречи на допускането,че чистият ранг е r .С това доказателството е завършено.

<u>Лема 3.</u> При предположенията на лема 2 [redacted] функциите $f_1,\dots f_r$ от системата (4) ,която се определя от теоремата за съществуване на неявните функции,не зависят от $t_{m-r+1},\dots, t_q$

<u>Доказателство.</u> Вижда се от доказателството на лема 2.

<u>Лема 4.</u> Чистата размерност d и чистия ранг r в една и съща [redacted] точка c [redacted] са свързани със зависимостта

$$d=p-r$$

<u>Доказателство.</u> Да разгледаме тангенциалната система

$$\frac{\partial F_1(c)}{\partial x_1}\lambda_1+\dots+\frac{\partial F_1(c)}{\partial x_p}\lambda_p+\frac{\partial F_1(c)}{\partial t_1}\mu_1+\dots+\frac{\partial F_1}{\partial t_q}\mu_q=0$$

$$- - - - - - - - - - - - - - - -$$

$$\frac{\partial F_m(c)}{\partial x_1}\lambda_1+\dots+\frac{\partial F_m(c)}{\partial x_p}\lambda_p+\frac{\partial F_m(c)}{\partial t_1}\mu_1+\dots+\frac{\partial F_m(c)}{\partial t_q}\mu_q=0$$

Нека например

$$\frac{D(F_1, - - - F_m)}{D(x_1,\dots x_r, t_1,\dots t_{m-r})}(c)\neq 0.$$

Нека освен това r е чистият ранг. Той е постоянен, защото системата (4) е линейна. Формулите на Крамер ни дават $\lambda_1, \dots \lambda_r, \mu_1, \dots \mu_{m-r}$ като линейни функции на $\lambda_{r+1}, \dots \lambda_p, \mu_{m-r+1}, \dots \mu_q$, които ние ще означим по следния начин

$$
(5) \quad
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \alpha_{11}\lambda_{r+1} + \dots + \alpha_{1\,p-r}\lambda_p + \beta_{11}\mu_{m-r+1} + \dots + \beta_{1\,q+r-m}\mu_q \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\lambda_r &= \alpha_{r1}\lambda_{r+1} + \dots + \alpha_{r\,p-r}\lambda_p + \beta_{r1}\mu_{m-r+1} + \dots + \beta_{r\,q+r-m}\mu_q \\
\mu_1 &= \gamma_{11}\lambda_{r+1} + \dots + \gamma_{1\,p-r}\lambda_p + \delta_{11}\mu_{m-r+1} + \dots + \delta_{1\,q+r-m}\mu_q \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mu_{m-r} &= \gamma_{m-r\,1}\lambda_{r+1} + \dots\dots
\end{aligned}
$$

Това е общото решение на системата (4), защото m е нейния ранг. Понеже чистият ранг, както споменахме по-горе, е постоянен, ние можем да приложим лема 3 и да заключим, че

$$\beta_{ik} = 0 \quad (i = 1, \dots r;\ k = 1, \dots q+r-m).$$

По такъв начин виждаме, че чистата графика на системата (4) има размерност $p-r$, защото нейните точки се изразяват чрез параметрите $\lambda_{r+1}, \dots \lambda_p$, които са $p-r$ на брой. Така получаваме $d = p-r$.

<u>Дефиниция.</u> Системата

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1(c)}{\partial t_1}\mu_1 + \dots\dots + \frac{\partial F_1(c)}{\partial t_q}\mu_q = 0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\frac{\partial F_n(c)}{\partial t_1}\mu_1 + \dots\dots + \frac{\partial F_n(c)}{\partial t_q}\mu_q = 0
\end{aligned}
$$

ще наричаме система на ексцеса. Размерността на пространството от нейните решения ще наричаме ексцес и ще означаваме с e.

<u>Лема 5.</u>

$$d = b - e.$$

<u>Доказателство.</u> Пълното решение на системата на ексцеса получаваме от (5) като поставим $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_p = 0$. По такъв начин решенията на системата на ексцеса зависят от параметрите $\mu_{m-r+1}, \dots \mu_q$, които са $q+r-m$ на брой. и сл. $e = q+r-m$ откъдето $d = b - e$.

<u>Теорема 1.</u> Съвокупността от обикновените точки на брутната графика е релативно отворено навсякъде гъсто множество.

<u>Доказателство.</u> Нека V е отворено подмножество на W, което съдържа поне една точка от брутната графика. Съгласно лема 1 в V има точка от брутната графика в някоя околност на която чистият ранг е постоянен. В такъв случай съгласно лема 4 и чистата размерност на точките от брутната графика, които лежат в тази околност, също ще бъде постоянна, което показва, че точката, от която изхождахме, е обикновена. И така обикновените точки са разпределени навсякъде гъсто. Че те

образуват релативно отворено множество следва непосредствено от дефиницията на понятието обикновено точка, защото всичките точки от подходяща околност на обикновена точка имат една и съща чиста размерност и следователно са също обикновени.

<u>Теорема.2.</u> Нека c е обикновена точка от брутната графика и нека h е чистия ранг на тази точка. Тогава теоремата за неявните функции ни дава следното локално представяне

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f_1(x_{r+1}, \dots x_p) \\
&\dots\dots\dots \\
x_r &= f_r(x_{r+1}, \dots x_p) \\
t_1 &= g_1(x_{r+1}, \dots x_p; t_{m-r+1}, \dots t_q) \qquad (6)\\
&\dots\dots\dots \\
t_{m-r} &= g_{m-r}(x_{r+1}, \dots x_p; t_{m-r+1}, \dots t_q)
\end{aligned}
$$

<u>Доказателство.</u> Това следва от лема 2 и лема 4.

<u>Теорема 3.</u> Векторите

$$(11) \quad \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}, \dots \frac{\partial f_r}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial x_{r+1}}{\partial x_\alpha}, \dots \frac{\partial x_p}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial g_1}{\partial x_\alpha}, \dots \frac{\partial g_{m-r}}{\partial x_\alpha}\ 0, \dots 0\right), \alpha = r+1, \dots p$$

$$(12) \quad \left(0 \dots 0, 0 \quad 0, \frac{\partial g_1}{\partial t_\beta}, \dots \frac{\partial g_{m-r}}{\partial t_\beta}\ \frac{\partial t_{m-r+1}}{\partial t_\beta}, \dots \frac{\partial t_q}{\partial t_\beta}\right) \quad \beta = m-r+1, \dots q$$

ни дават пълна система от линейно независими решения на тангенциалната система. Векторите (11)

ни дават пълна система от линейно независими решения на чистата графика на тангенциалната система. Векторите (12)

ни дават пълна система от линейно независими решения на системата на екцеса.

<u>Доказателство</u>. Като диференцираме системата (A) съответно по x_α и по t_β се убеждаваме, че тези вектори удовлетворяват тангенциалната система. Тяхната линейна независимост е очевидна. Техният брой е равен на съответната размерност. С това всичко е доказано.

Нека $u(x_1,\dots,x_p;t_1,\dots t_q)$

е гладка функция, дефинирана в W. Локалното представяне (6) ни дава възможност да елиминираме параметрите $t_1,\dots,t_{m-r}$ и по такъв начин получаваме функцията

$$\varphi = u(f_1,\dots f_r, x_{r+1},\dots x_p, g_1 \dots g_{m-r}, t_{m-r+1},\dots t_q).$$

Тази функция изобщо зависи от параметрите $t_{m-r+1},\dots t_q$. Ние ще изучим условията, при които тази функция не зависи от параметрите. За да получим необходими условия да допуснем, че φ не зависи от $t_{m-r+1},\dots,t_q$. Тогава

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_\beta} = \frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{\partial g_1}{\partial t_\beta} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t_{m-r}}\frac{\partial g_{m-r}}{\partial t_\beta} + \frac{\partial u}{\partial t_{m-r+1}}\frac{\partial t_{m-r+1}}{\partial t_\beta} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t_q}\frac{\partial t_q}{\partial t_\beta} = 0$$

$$\beta = m-r+1,\dots,q$$

От друга страна векторите (12) образуват пълна система от линейно независими решения на системата на екосеса. От това заключаваме, че всяко решение на системата на екосеса

$$(7)\qquad \begin{array}{l} \dfrac{\partial F_1}{\partial t_1}\mu_1 + \dots + \dfrac{\partial F_1}{\partial t_q}\mu_q = 0 \\ \text{- - - - - - - - - - - -} \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial t_1}\mu_1 + \dots + \dfrac{\partial F_n}{\partial t_q}\mu_q = 0 \end{array}$$

удовлетворява уравнението

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}\mu_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial t_q}\mu_q = 0$$

и следователно това уравнение представлява линейна комбинация от уравненията (7). По такъв начин получаваме

$$(8)\qquad \frac{\partial u}{\partial t_\beta} = \sum \rho_\nu \frac{\partial F_\nu}{\partial t_\beta} \qquad (\beta = 1,\dots,q)$$

където ρ_ν са непрекъснати функции на $x_1,\dots x_p, t_1,\dots t_q$. Ако функциите $F_1,\dots F_n$ са два пъти гладки, то функциите ρ_ν могат да бъдат избрани така, че да бъдат гладки.

11

Сега ще покажем,че условията (8) са и достатъчни за да не зависи функцията от параметрите.И наистина имаме

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_\rho} = \frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{\partial g_1}{\partial t_\rho} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t_{m-r}}\frac{\partial g_{m-r}}{\partial t_\rho} + \frac{\partial u}{\partial t_{m-r+1}}\frac{\partial t_{m-r+1}}{\partial t_\rho} + \dots + \frac{\partial u}{\partial t_q}\frac{\partial t_q}{\partial t_\rho} =$$

$$= \left(\sum_{\nu=1}^{n} \rho_\nu \frac{\partial F_\nu}{\partial t_1}\right)\frac{\partial g_1}{\partial t_\rho} + \dots \left(\sum_{\nu=1}^{n} \rho_\nu \frac{\partial F_\nu}{\partial t_{m-r}}\right)\frac{\partial g_{m-r}}{\partial t_\rho} - \dots + \left(\sum_{\nu=1}^{n} \rho_\nu \frac{\partial F_\nu}{\partial t_q}\right)\frac{\partial t_q}{\partial t_\rho} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \rho_\nu \left(\frac{\partial F_\nu}{\partial t_1}\frac{\partial g_1}{\partial t_\rho} + \dots + \frac{\partial F_\nu}{\partial t_{m-r}}\frac{\partial g_{m-r}}{\partial t_\rho} + \frac{\partial F_\nu}{\partial t_{m-r+1}}\frac{\partial t_{m-r+1}}{\partial t_\rho} + \dots + \frac{\partial F_\nu}{\partial t_q}\frac{\partial t_q}{\partial t_\rho}\right) =$$

$$= 0$$

Гладка функция в u ,която удовлетворява уравненията (8) ще наричаме <u>допустима</u>.

Уравненията (8) могат да се разглеждат като обобщение на уравненията на Коши-Риман.И наистина да разгледаме уравнението

$$z - t_1 - i t_2 = 0$$

където t_1 и t_2 са реални параметри,а z е комплексна пространствена променлива.Да видим,кога една комплексна функция u която зависи само от параметрите е допустима.Уравненията (8) в този случай добиват вида

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = -\rho \ , \quad \frac{\partial u}{\partial t_2} = -i\rho$$

Като елиминираме ρ получаваме

$$i\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial t_2},$$

което е точно уравнението на Коши-Риман.Функцията u ,разбира се, е функция,която приема комплексни стойности.