Диагонален принцип за обобщени редици

Я.Тагамлицки

Нека $\{a_\alpha\}$ е обобщена редица, чийто индекс α описва насочената надясно система A. Ще казваме, че $\{a_{\alpha_\beta}\}$ е една нейна подредица, ако α_β е монотонно и неограничено растяща функция, чиято дефиниционна област е някоя насочена надясно система, а функционалните стойности принадлежат на A .

Ще казваме, че $\sum$ е стабилна класа от обобщени редици, ако заедно със всяка обобщена редица, която и принадлежи, тя съдържа и всяка подредица на такава редица. Като примери на стабилни класи могат да ни служат класата на сходящите редици, класата на редиците, които удовлетворяват условието на Коши, класата на ограничените редици, класата на редиците, чиито членове принадлежат към някое фиксирано множество, класата на монотонните числови редици и пр.

Ще казваме, че ни е дадена система $M \to \{\Sigma_t\}$ от стабилни класи Σ_t , където t се мени в множеството M , ако на всяко t от M е съпоставена по една стабилна класа Σ_t .

<u>Диагонален принцип.</u> Нека $M \to \{\Sigma_t\}$ е система от стабилни класи и $\{a_\alpha\}$ е обобщена редица, за която при всяко фиксирано t от M от всяка подредица $\{a_{\alpha_\beta}\}$ може да се избере /изобщо зависяща от t / подподредица $\{a_{\alpha_{\beta_\gamma}}\}$, която принадлежи на Σ_t . Тогава може да се избере независяща от t подредица $\{a_{\alpha_\delta}\}$ по такъв начин, че за всяко t от известно /изобщо зависяще от t / място нанатък подредицата $\{a_{\alpha_\delta}\}$ да принадлежи на Σ_t .

<u>Доказателство .</u> Нека

$$(1) \qquad t_1, t_2, \ldots$$

е една добра наредба на M . Нека A е насочената система, която се описва от индекса на $\{a_\alpha\}$. За всяко трансфинитно число z , което фигурира като индекс в (1) ще дефинираме насочена ~~xxxxxxx~~ надясно система B_z и за всеки две трансфинитни числа $x \leqq y$ ще дефинираме функция $\varrho_{xy}(\beta): B_y \to B_x$ така, че да бъдат изпълнени следните условия:

1. Всяка насочена ситема B_z има пръв елемент /ние ще го означаваме с O_z или по-кратко с O /

2. За всяка двойка трансфинитни числа $x \leqq y$ имаме $\rho_{xy}(0)=0$

3. При фиксирани $x \leqq y$ функцията $\rho_{xy}(\beta)$ расте монотонно и неограничено.

4. Ако $x \leqq y \leqq z$ и $\rho_{y,z}(\beta) \neq 0$,то

$$\rho_{xy}(\rho_{yz}(\beta)) = \rho_{xz}(\beta)$$

5. При всяко z имаме

$$\left\{ a_{\rho_{1z}(\beta)} \right\} \in \Sigma_{t_z}$$

при $\beta > 0$.

Ще дефинираме B_z и ρ_{xy} индуктивно. За тази цел полагаме $B_1 = \{0\} \cup A$,полагаме $0 < \alpha$ при всяко $\alpha \in A$ и най-сетне полагаме $\rho_{11}(\beta) = \beta$ при всяко $\beta \in B_1$.

По-нататък да допуснем,че B_z и ρ_{xy} са дефинирани при $z < p$ и $x \leqq y < p$.

Да означим с C_p съвокупността от двойките $\sigma = (y, \beta)$, където $y < p$ и $\beta \in B_y$.Нареждаме C_p ,като пишем $(y_1, \beta_1) \leqq (y_2, \beta_2)$ когато $y_1 \leqq y_2$ и $\beta_1 \leqq \rho_{y_1 y_2}(\beta_2)$.
Транзитивността на тази релация се вижда така.Нека

$$(y_1, \beta_1) \leqq (y_2, \beta_2) \leqq (y_3, \beta_3)$$

т.е.

$$y_1 \leqq y_2 \,,\; \beta_1 \leqq \rho_{y_1 y_2}(\beta_2) \quad и \quad y_2 \leqq y_3 \,,\; \beta_2 \leqq \rho_{y_2 y_3}(\beta_3).$$

Тогава имаме $y_1 \leqq y_3$ и $\beta_1 \leqq \rho_{y_1 y_2}(\rho_{y_2 y_3}(\beta_3))$.

Ако $\rho_{y_2 y_3}(\beta_3) \neq 0$,то

$$\rho_{y_1 y_2}(\rho_{y_2 y_3}(\beta_3)) = \rho_{y_1 y_3}(\beta_3)$$

т.е. $\beta_1 \leqq \rho_{y_1 y_3}(\beta_3)$ и следователно $(y_1, \beta_1) \leqq (y_3, \beta_3)$.
Ако $\rho_{y_2 y_3}(\beta_3) = 0$,то $\beta_2 = 0$ и следователно съгласно 2. имаме $\rho_{y_1 y_2}(\beta_2) = 0$ и значи $\beta_1 = 0$,т.е. пак $\beta_1 \leqq \rho_{y_1 y_3}(\beta_3)$.
С това транзитивността на наредбата е установена. Сега ще

покажем,че C_p е насочена надясно система. За тази цел избираме две двойки (y_1,β_1) и (y_2,β_2) от C_p. Нека например $y_1 \leqq y_2$. Обаче съгласно условието 3 функцията $\varrho_{y_1y_2}(\beta)$ расте неограничено и следователно можем да изберем β_3 в B_{y_2} толкова голямо, че да имаме $\beta_1 \leqq \varrho_{y_1y_2}(\beta_3)$ и $\beta_3 \leqq \beta_4$. Сега да изберем β_4 така, че да имаме $\beta_2 \leqq \beta_4$. В такъв случай поради монотонността на $\varrho_{y_1y_2}$, която имаме от условието 3, получаваме $\beta_1 \leqq \varrho_{y_1y_2}(\beta_4)$ и $\beta_2 \leqq \beta_4$. По такъв начин (y_2,β_4) ще следва както (y_1,β_1), така и (y_2,β_2).

Сега полагаме

$$\psi(\sigma) = \varrho_{1y}(\beta)$$

където $\sigma = (y,\beta)$. Това е една функция, дефинирана в C_p и приемаща стойности в B_1. Тя расте монотонно. И наистина, нека

$$\sigma_1 = (y_1,\beta_1) \leqq \sigma_2 = (y_2,\beta_2)$$

Тогава

$$\beta_1 \leqq \varrho_{y_1y_2}(\beta_2)$$

и следователно ако $\varrho_{y_1y_2}(\beta_2) \neq 0$, то

$$\varrho_{1y_1}(\beta_1) \leqq \varrho_{1y_1}(\varrho_{y_1y_2}(\beta_2)) = \varrho_{1y_2}(\beta_2)$$

т.е. $\psi(\sigma_1) \leqq \psi(\sigma_2)$. Ако $\varrho_{y_1y_2}(\beta_2) = 0$, то $\beta_1 = 0$ и следователно $\varrho_{1y_1}(\beta_1) = 0$ съгласно условието 2, и значи $\psi(\sigma_1) = 0$ т.е. пак $\psi(\sigma_1) \leqq \psi(\sigma_2)$.

Сега ще покажем, че $\psi(\sigma)$ расте неограничено. И наистина, нека $\beta_1 \in B_1$. Тогава $\sigma_1 = (1,\beta_1)$ е една двойка от C_p. Очевидно имаме $\psi(\sigma_1) = \varrho_{11}(\beta_1) = \beta_1$ и толкова повече $\psi(\sigma_1) \geqq \beta_1$.

По такъв начин

$$\{a_{\psi(\sigma)}\}$$

е една подредица на $\{a_\alpha\}$. Съгласно условието ние можем да изберем подподредица

$$\{a_{\psi(\sigma_\gamma)}\},$$

която принадлежи на Σ_{t_p}. Да означим с Γ насочената система, която се описва от индекса γ, да положим

$B_p=\{0\}\cup\Gamma$ и да положим $0<\gamma$ при $\gamma\in\Gamma$. Нека $\sigma_\gamma=(y_\gamma,\beta_\gamma)$.
При $x<p$ полагаме

$$\rho_{xp}(\gamma)=\rho_{xy_\gamma}(\beta_\gamma),$$

ако $\gamma\in\Gamma$ и $x\leqq y_\gamma$. Ако ли пък $\gamma=0$ или $x\not\leqq y_\gamma$,
то полагаме

$$\rho_{xp}(\gamma)=0.$$

Най-сетне полагаме

$$\rho_{pp}(\beta)=\beta$$

Сега ще покажем, че са изпълнени условията 1,2,3,4 и 5.
За условията 1 и 2 това е очевидно. Преминаваме към условието 3.
Ще покажем, че ρ_{xp} расте монотонно и неограничено при фиксирано $x\leqq p$. При $x=p$ това е очевидно. Нека $x<p$ и нека $\beta_1<\beta_2$. Ако $\beta_1=0$, то $\rho_{xp}(\beta_1)=0$ и следователно $\rho_{xp}(\beta_1)\leqq\rho_{xp}(\beta_2)$. Сега да разгледаме случая $\beta_1\neq 0$.
Но тогава и $\beta_2\neq 0$ и следователно можем да пишем $\beta_1=\gamma_1\in\Gamma$ и $\beta_2=\gamma_2\in\Gamma$.
Нека $\sigma_\gamma=(y_\gamma,\beta_\gamma)$. Ако $x\not\leqq y_{\gamma_1}$, то $\rho_{xp}(\gamma_1)=0$ и следователно пак е изпълнено $\rho_{xp}(\beta_1)\leqq\rho_{xp}(\beta_2)$. Сега да разгледаме случая $x\leqq y_{\gamma_1}$. Но от $\beta_1\leqq\beta_2$, т.е. от $\gamma_1\leqq\gamma_2$ имаме $y_{\gamma_1}\leqq y_{\gamma_2}$ и следователно $x\leqq y_{\gamma_2}$, поради което

$$\rho_{xp}(\beta_1)=\rho_{xy_{\gamma_1}}(\beta_{\gamma_1})\qquad(2)$$

$$\rho_{xp}(\beta_2)=\rho_{xy_{\gamma_2}}(\beta_{\gamma_2})$$

От друга страна

$$\sigma_{\gamma_1}\leqq\sigma_{\gamma_2}\text{ поради което }\beta_{\gamma_1}\leqq\rho_{y_{\gamma_1}y_{\gamma_2}}(\beta_{\gamma_2})\qquad(3)$$

и следователно ако

$$\rho_{y_{\gamma_1}y_{\gamma_2}}(\beta_{\gamma_2})\neq 0,$$

то

$$\rho_{xp}(\beta_1)=\rho_{xy_{\gamma_1}}(\beta_{\gamma_1})\leqq\rho_{xy_{\gamma_1}}(\rho_{y_{\gamma_1}y_{\gamma_2}}(\beta_{\gamma_2}))=\rho_{xy_{\gamma_2}}(\beta_{\gamma_2})=\rho_{xp}(\beta_2)$$

Ако ли пък $\rho_{y_{\gamma_1}y_{\gamma_2}}(\beta_{\gamma_2})=0$, то от (3) получаваме $\beta_{\gamma_1}=0$
и от (2) следва $\rho_{xp}(\beta_1)=0$, т.е. пак $\rho_{xp}(\beta_1)\leqq\rho_{xp}(\beta_2)$

С това е показано, че $\rho_{xp}(\beta)$ расте монотонно.

6

Сега ще покажем, че ρ_{xp} расте и неограничено. И наистина, нека $\beta_0 \in B_x$. Тогава двойката (x, β_0) принадлежи на C_p и следователно можем да изберем γ толкова голямо, че да имаме $(x, \beta_0) \leqq \sigma_\gamma$. Нека $\sigma_\gamma = (y_\gamma, \beta_\gamma)$. Тогава $\beta_0 \leqq \rho_{xy_\gamma}(\beta_\gamma)$, т.е. $\beta_0 \leqq \rho_{xp}(\gamma)$. С това е показано, че ρ_{xp} е способна да приема произволно големи стойности.

Преминаваме към проверката на условието 4, т.е. ще покажем, че ако $x \leqq y \leqq p$ и $\rho_{yp}(\gamma) \neq 0$, то

$$(4) \qquad \rho_{xy}(\rho_{yp}(\gamma)) = \rho_{xp}(\gamma).$$

В случая, когато $y = p$ имаме $\rho_{pp}(\beta) = \beta$ и следователно равенството (4) е очевидно. Да разгледаме ~~xxxx~~ случая $y < p$ и да пишем както досега $\sigma_\gamma = (y_\gamma, \beta_\gamma)$. От $\rho_{yp}(\gamma) \neq 0$ заключаваме, че $y \leqq y_\gamma$ и следователно $x \leqq y_\gamma$. Така получаваме

$$\rho_{yp}(\gamma) = \rho_{yy_\gamma}(\beta_\gamma) \quad \text{и}$$

$$\rho_{xp}(\gamma) = \rho_{xy_\gamma}(\beta_\gamma)$$

и следователно (4) приема вида

$$\rho_{xy}(\rho_{yy_\gamma}(\beta_\gamma)) = \rho_{xy_\gamma}(\beta_\gamma),$$

което е вярно съгласно индуктивното предположение, защото

$$\rho_{yy_\gamma}(\beta_\gamma) = \rho_{yp}(\gamma) \neq 0.$$

С това 4 е доказано.

Най-сетне остана да проверим условието 5, т.е. да покажем, че

$$\{a_{\rho_{1p}(\beta)}\} \in \Sigma_{t_p}$$

при $\beta > 0$. Да положим, както досега $\sigma_\gamma = (y_\gamma, \beta_\gamma)$ при $\gamma \in \Gamma$. Тогава имаме

$$\rho_{1p}(\gamma) = \rho_{1y_\gamma}(\beta_\gamma),$$

защото условието $1 \leqq y_\gamma$ е изпълнено. По такъв начин

и следователно $$\rho_{1p}(\gamma) = \Psi(\sigma_\gamma)$$

$$\{a_{\rho_{1p}(\gamma)}\} = \{a_{\Psi(\sigma_\gamma)}\} \in \Sigma_{t_p}.$$

С това индуктивната конструкция на B_z и ρ_{xy} е завършена.

След тази предварителна работа сме готови да докажем диагоналния принцип. За тази цел означаваме с C съвокупността на на всевъзможните двойки $\sigma = (y, \beta)$, където y е трансфинитно число, което фигурира като индекс в (1) и $\beta \in B_y$. Нареждаме C по същия начин, както направихме това за C_p. С това C се превръща в насочена надясно система. Полагаме

$$\psi_x(\sigma) = \varrho_{xy}(\beta).$$

Тази дефиниция е коректна, когато $y \geqq x$, нещо което е изпълнено при всяко фиксирано x за достатъчно големи стойности на σ. Ще покажем, че при фиксирано x функцията ψ_x расте монотонно и неограничено. И наистина, нека $\sigma_1 \leqq \sigma_2$, където $\sigma_1 = (y_1, \beta_1)$ и $\sigma_2 = (y_2, \beta_2)$. Тогава $\beta_1 \leqq \varrho_{y_1 y_2}(\beta_2)$. Ако $\varrho_{y_1 y_2}(\beta_2) \neq 0$ то

$$\psi_x(\sigma_1) = \varrho_{xy_1}(\beta_1) \leqq \varrho_{xy_1}(\varrho_{y_1 y_2}(\beta_2)) = \varrho_{xy_2}(\beta_2) = \psi_x(\sigma_2).$$

Ако ли пък $\varrho_{y_1 y_2}(\beta_2) = 0$, то $\beta_1 = 0$ и следователно $\psi_x(\sigma_1) = 0$ т.е. пак имаме $\psi_x(\sigma_1) \leqq \psi_x(\sigma_2)$.

Сега да покажем, че ψ_x расте неограничено. За тази цел избираме $\beta_0 \in B_x$ и полагаме $\sigma_0 = (x, \beta_0)$. Тогава

$$\psi_x(\sigma_0) = \varrho_{xx}(\beta_0) = \beta_0$$

и толкова повече $\psi_x(\sigma_0) \geqq \beta_0$.

Да фиксираме x. Тогава при достатъчно големи стойности на $\sigma = (y, \beta)$ ще имаме $\psi_x(\sigma) \neq 0$, т.е. $\varrho_{xy}(\beta) \neq 0$ и следователно

$$\psi_1(\sigma) = \varrho_{1y}(\beta) = \varrho_{1x}(\varrho_{xy}(\beta)) = \varrho_{1x}(\psi_x(\sigma)).$$

Сега да разгледаме подредицата $\{a_{\psi_1(\sigma)}\}$. Ще покажем, че при всяко фиксирано x имаме от известно място нататък

$$\{a_{\psi_1(\sigma)}\} \in \Sigma_{t_x}.$$

И наистина, при $\beta > 0$ имаме

$$\{ a_{\rho_{1x}(\beta)} \} \in \Sigma_{t_x}$$

и следователно поради стабилността на Σ_{t_x} получаваме

$$\{ a_{\rho_{1x}(\psi_x(\sigma))} \} \in \Sigma_{t_x},$$

където на $\sigma = (y, \beta)$ даваме толкова големи стойности, че да имаме $y \geqq x$, за да можем да образуваме $\psi_x(\sigma)$. Обаче

$$\rho_{1x}(\psi_x(\sigma)) = \psi_1(\sigma)$$

и следователно

$$\{ a_{\psi_1(\sigma)} \} \in \Sigma_{t_x},$$

където на $\sigma = (y, \beta)$ се дават толкова големи стойности, че да имаме $y \geqq x$. С това доказателството е завършено.