Доклады Болгарской Академии Наук
Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sciences
Tome 4, № 2 et 3, Avril-Juin et Octobre-Décembre, 1951

ТЕОРЕМА МИНКОВСКОГО ОБ ОТДЕЛЯЮЩИХ ПЛОСКОСТЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ ГИЛЬБЕРТА

Я. Тагамлицкий

СОФИЯ — 1951

Доклады Болгарской Академии Наук
Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sciences
Tome 4, № 2 et 3, Avril-Juin et Octobre-Décembre, 1951

МАТЕМАТИКА

ТЕОРЕМА МИНКОВСКОГО ОБ ОТДЕЛЯЮЩИХ ПЛОСКОСТЯХ В ПРОСТРАНСТВАХ ГИЛЬБЕРТА

Я. Тагамлицкий

(Представлена академиком Н. Обрешковым 20. IX. 1951)

Обозначим через H некоторое вещественное пространство Гильберта, т. е. линейное пространство со скалярным произведением, принимающим только вещественные значения, полное относительно сильной сходимости. Множество R элементов из H будем называть выпуклым, сильно замкнутым конусом исходящим из нулевого элемента пространства H, если

1. из $a \varepsilon R$, $b \varepsilon R$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ (α и β вещественные числа) следует $(\alpha a + \beta b) \varepsilon R$,

2. предел сильно сходящейся последовательности элементов из R всегда лежит в R.

Будем называть конус R острым, если при всех $r_1 \varepsilon R$, $r_2 \varepsilon R$, $r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$ имеем $(r_1, r_2) > 0$. Будем называт конус R сильно компактным, если из каждой ограниченной последовательности элементов лежащих в R можно выбрать сильно сходящуюся частичную последовательность, предел, которой лежит в R.

Теорема. Обозначим через K и L два выпуклых сильно замкнутых конуса, исходящих из нулевого элемента пространства H. Если конусы K и L не имеют другого общего элемента, кроме нулевого элемента пространства H и если конус L острый и сильно компактный, то существует такой элемент $s \varepsilon H$, для которого

$$(s,\ k) \geqslant 0$$
$$(s,\ l) < 0$$

при всех $k \varepsilon K$ и $l \varepsilon L$, $l \neq 0$.

Замечание. Эта теорема является обобщением известной теоремы Минковского об опорных плоскостях [1].

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $(k, l) \leqslant 0$ при всех $k \varepsilon K$, $l \varepsilon L$. В таком случае обозначая через $-s$ любой неисчезающий элемент из L получим $(s, l) < 0$ при $l \varepsilon L$, $l \neq 0$ и $(s, k) \geqslant 0$

при $k \varepsilon K$. Таким образом в этом случае установлено существование интересующего нас элемента. Остается рассмотреть случай, когда скалярное произведение (k, l) способно принимать существенно положительные значения при $k \varepsilon K$ и $l \varepsilon L$. При $(k, k)=1$ и $(l, l)=1$ получим из неравенства Коши-Буняковского $(k, l)^2 \leqslant 1$. Обозначим через λ верхнюю грань скалярных произведений (k, l), где $(k, k)=(l, l)=1$, $k \varepsilon K$, $l \varepsilon L$. Выберем последовательности

(1) $$l_1, l_2, l_3, \ldots$$

(2) $$k_1, k_2, k_3, \ldots$$

из которых первая сходится сильно, а вторая слабо, таким образом чтобы выполнялись условия

$$l_n \varepsilon L,\ k_n \varepsilon K,\ (l_n, l_n)=(k_n, k_n)=1,\ \lim (l_n, k_n)=\lambda,$$

и положим

$$\lim l_n = l_0, \quad \lim k_n = k_0.$$

Очевидно $(l_0, l_0)=1$. На основании определения λ получим при любом $x \varepsilon K$, $y \varepsilon L$ и $t \geqslant 0$ следующие неравенства:

$$\lambda\sqrt{(k_n+tx, k_n+tx)} - (l_n, k_n+tx) \geqslant 0$$
$$\lambda\sqrt{(l_n+ty, l_n+ty)} - (k_n, l_n+ty) \geqslant 0$$

и, следовательно, при достаточно больших значениях n и достаточно малых значениях t будем иметь

$$\lambda^2(k_n+tx, k_n+tx)-(l_n, k_n+tx)^2 \geqslant 0$$
$$\lambda^2(l_n+ty, l_n+ty)-(k_n, l_n+ty)^2 \geqslant 0,$$

т. е.

$$\lambda^2-(l_n, k_n)^2+2t[\lambda^2(k_n, x)-(l_n, x)(l_n, k_n)]+t^2[\lambda^2(x, x)-(l_n, x)^2] \geqslant 0$$
$$\lambda^2-(l_n, k_n)^2+2t[\lambda^2(l_n, y)-(k_n, y)(l_n, k_n)]+t^2[\lambda^2(y, y)-(k_n, y)^2] \geqslant 0.$$

Переходя к пределу по n получим при $t>0$

$$2[\lambda^2(k_0, x)-(l_0, x)\lambda]+t[\lambda^2(x, x)-(l_0, x)^2] \geqslant 0$$
$$2[\lambda^2(l_0, y)-(k_0, y)\lambda]+t[\lambda^2(y, y)-(k_0, y)^2] \geqslant 0.$$

Далее, принимая во внимание, что $\lambda>0$ получим

$$\lambda(k_0, x)-(l_0, x) \geqslant 0$$
$$\lambda(l_0, y)-(k_0, y) \geqslant 0.$$

Мы утверждаем, что при $y \neq 0$

(3) $$(\lambda k_0 - l_0, y) < 0.$$

В самом деле, если при некотором $y_0 \varepsilon L$, $y_0 \neq 0$ будем иметь

$$(\lambda k_0 - l_0, y_0) \geqslant 0$$

т. е.

$$\lambda (k_0, y_0) - (l_0, y_0) \geqslant 0$$

то учитывая неравенства

$$\lambda (l_0, y_0) - (k_0, y_0) \geqslant 0, \quad \lambda > 0$$

получим

$$(\lambda^2 - 1)(l_0, y_0) \geqslant 0.$$

С другой стороны конус L острый и $l_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ и, следовательно, $(l_0, y_0) > 0$. Из этого вытекает, что $\lambda^2 - 1 \geqslant 0$. Принимая во внимание еще, что $(l_n, k_n)^2 \leqslant 1$, находим $\lambda^2 \leqslant 1$ и, следовательно,

$$\lambda = 1$$

Далее, пользуясь равенством

$$(l_n, k_n) = (l_0, k_n) + (l_n - l_0, k_n)$$

и неравенством Коши-Буняковского, получим $\lambda = (l_0, k_0)$, т. е.

(4) $$(l_0, k_0) = 1$$

Рассмотрим далее неравенство

(5) $$(k_0 - k_n, k_0 - k_n) = (k_0, k_0) - 2(k_n, k_0) + 1 \geqslant 0.$$

Переходя к пределу по n получим

(6) $$(k_0, k_0) \leqslant 1$$

Из неравенства (6), из равенства (4) и $(l_0, l_0) = 1$ и из неравенства Коши-Буняковского получим

(7) $$(k_0, l_0)^2 = (l_0, l_0)(k_0, k_0)$$

и

(8) $$(k_0, k_0) = 1$$

Используя равенство (8) можем переписать (5) в виде

$$(k_0 - k_n, k_0 - k_n) = 2 - 2(k_n, k_0),$$

что вместе с (8) обеспечивает сильную сходимость последовательности (2). Из этого вытекает $k_0 \varepsilon K$. С другой стороны из равенства (7) следует колинеарность элементов l_0 и k_0. Положим $l_0 = \varrho k_0$, где ϱ вещественное число. Из (4) получим $\varrho = 1$ и, следовательно, конусы K и L имеют общий неисчезающий элемент, что противоречит нашим предположениям. Таким образом неравенство (3) доказано. Далее, полагая $s = \lambda k_0 - l_0$ завершаем без труда доказательство.

ÜBERTRAGUNG DES MINKOWSKISCHEN STÜTZEBENENSATZES AUF HILBERTSCHE RÄUME

Y. Tagamlitzki

Zusammenfassung

Beweis des folgenden Satzes: es seien K und L zwei konvexe, stark abgeschlossene, vom Nullpunkt eines reellen Hilbertschen Raumes H ausgehende Kegel, deren Durchschnitt nur den Nullpunkt enthält; ist der Kegel L stark kompakt und spitz, so existiert ein Vektor s aus H, bei dem

$$(s, k) \geqslant 0, \quad (s, l) < 0$$

für alle k aus K und $l \neq 0$ aus L gilt.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. H. Minkowski, Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs, Ges. Abh. 2, 1911, 137—229.