ГОДИШНИК НА СОФИЙСКИЯ УНИВЕРСИТЕТ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИ ФАКУЛТЕТ
ТОМ 48, 1953/54, КН. 1 (МАТЕМАТИКА И ФИЗИКА), Ч. I

ANNUAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SOFIA
FACULTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES
T. 48, 1953/54, LIVRE 1 (MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE), PARTIE I

ВЪРХУ ЕДНО ОБОБЩЕНИЕ НА ПОНЯТИЕТО ЗА НЕРАЗЛОЖИМОСТ

Я. Тагамлицки

Понятието за неразложимост спада към основните понятия в теорията на числата и алгебрата, но се използува и в други области на математиката. Доколкото ни е известно, това понятие е въведено в геометрията от Минковски [1]. В по-ново време понятието за неразложимост се среща в работите на А. Г. Пинскер [3], Б. С. Над [4], И. М. Гельфанд [5, 11], Д. А. Райков [5, 11], Н. Н. Боголюбов [6, 7, 10], Н. М. Крылов [6, 7], М. Г. Крейн [2, 8, 9], Д. П. Мильман [8, 12], С. Г. Крейн [9, 10], М. А. Рутман [12], Н. Бурбаки [13] и др. В няколко от нашите последни публикации [14] ние се стремяхме да въведем това понятие по систематичен начин в някои въпроси от класичния анализ. За тази цел ние разработихме един общ метод, който приложихме към позитивната проблема за моментите и други сродни въпроси. От досегашните ни изследвания обаче не се вижда дали този метод е приложим и към съответните общи (не непременно позитивни) проблеми, каквато е например проблемата за моментите относно функция с ограничена вариация и пр. В настоящата работа ние ще дефинираме понятието неразложимост по такъв начин, че да обхванем проблеми и от този вид.

* * *

Ще казваме, че една съвкупност K е конус, ако на всеки неин елемент x и на всяко неотрицателно* число λ е съпоставен един елемент λx от K, като при това са изпълнени обичайните условия:

1) $1\,x=x$ при всяко x от K;

2) $0\,x=0\,y$ при всеки избор на x и y от K;

3) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)\,x$ при всяко x от K и при всички неотрицателни стойности на λ и μ;

4) ако λ и μ са неотрицателни числа, ако $\lambda\neq\mu$ и ако $\lambda x=\mu x$, където $x\in K$, то $x=0\,x$.

Произведението $0\,x$ ще означаваме кратко със символа 0.

Ще казваме, че един конус K е изпъкнал, ако в него е дефинирана сума на всеки два негови елемента, като при това са изпълнени изискванията:

1) ако $x\in K$ и $y\in K$, то $x+y=y+x$;

2) ако $x\in K$, $y\in K$, $z\in K$, то $(x+y)+z=x+(y+z)$;

3) ако $x\in K$, $y\in K$, $z\in K$ и $x+y=x+z$, то $y=z$;

* Вместо неотрицателни числа ние можем да си мислим елементите на коя да е комутативна полугрупа.

4) ако λ и μ са неотрицателни числа и $x \in K$, то $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$;

5) ако $x \in K$, $y \in K$ и λ е неотрицателно число, то $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$.

Ще казваме, че един конус K е регулярен, ако е изпъкнал и ако съществува система от (най-много) изброимо множество* функции**

$$F_1(x),\ F_2(x),\ \ldots, \tag{1}$$

дефинирани в K, които удовлетворяват следните условия:

1) ако λ и μ са неотрицателни числа и ако $x \in K$, $y \in K$, то

$$F_n(\lambda x+\mu y) = \lambda F_n(x) + \mu F_n(y);$$

2) ако $a \in K$, $b \in K$ и $F_n(a) = F_n(b)$ при всички цели положителни стойности на n, то $a = b$.

Системата (1) ще наричаме база на регулярност на конуса K или координатна система, а числата $F_1(a)$, $F_2(a), \ldots$ ще наричаме координати на елемента a.

Нека K е един регулярен конус и

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots \tag{2}$$

е редица от негови елементи. Ще казваме, че редицата (2) е свърхслабо сходяща (или сходяща относно базата), ако съществува такъв елемент a от K, за който да е изпълнено условието

$$\lim_{\nu \to \infty} F_n(a_\nu) = F_n(a)$$

при всички цели положителни стойности на n.

Ще казваме, че една функция $F(x)$, дефинирана в една подсъвкупност M на един регулярен конус K, е полунепрекъсната отдолу***, ако всеки път, когато редицата

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$$

от елементи на M свърхслабо клони към един елемент x_0 от M и са изпълнени неравенствата

$$F(x_\nu) \leqq A,$$

където константата A не зависи от ν, имаме $F(x_0) \leqq A$.

Ще казваме, че една функция $F(x)$, дефинирана в една подсъвкупност M на един регулярен конус K, е непрекъсната, ако двете функции $F(x)$ и $-F(x)$ са полунепрекъснати отдолу или (което е същото) ако всеки път, когато редицата

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots$$

от елементи на M свърхслабо клони към един елемент x_0 от M, редицата

* За да фиксираме идеите, ние ще предполагаме в тази работа, че редицата (1) е безкрайна. Нашите разсъждения обаче запазват, разбира се, своята валидност и тогава, когато тази редица е крайна.

** На първо време ние ще предполагаме, че функциите $F_n(x)$ приемат само реални стойности. По-късно ние обаче ще покажем как можем да се освободим от това предположение.

*** Вместо да казваме, че една функция $F(x)$ е полунепрекъсната отдолу, ние понякога ще казваме, че тя удовлетворява условието на Фату.

$$F(x_1),\ F(x_2),\ F(x_3),\ \ldots$$

е сходяща и клони към $F(x_0)$.

Ще казваме, че една функция $P(x)$, дефинирана в един регулярен конус K, е една негова норма, ако са изпълнени следните условия:

1. при всяко $a \varepsilon K$ имаме $P(a) \geqq 0$.

2. при всички неотрицателни стойности на λ и при всяко a от K имаме

$$P(\lambda a) = \lambda P(a).$$

3. Ако $a \varepsilon K$ и $b \varepsilon K$, то

$$P(a+b) \leqq P(a) + P(b).$$

4. Ако $P(a) = 0$, то $a = 0$.

5. Функцията $P(x)$ е полунепрекъсната отдолу.

Ще казваме, че една подсъвкупност M на един регулярен конус с норма $P(x)$ е затворена относно нормата $P(x)$, ако границата на всяка свърхслабо сходяща и ограничена относно нормата $P(x)$ редица от елементи на M също принадлежи на M.

Ще казваме, че една подсъвкупност M на един регулярен конус с норма $P(x)$ е компактна относно нормата $P(x)$, ако от всяка ограничена относно нормата $P(x)$ редица от елементи на M може да се избере свърхслабо сходяща подредица, чиято граница принадлежи на M.

Ще казваме, че един различен от нула елемент a на един конус K с норма $P(x)$ е неразложим относно нормата $P(x)$, ако от условията

$$a = b + c, \qquad b \varepsilon K, \qquad c \varepsilon K,$$
$$P(a) = P(b) + P(c)$$

следва, че елементите b и c са колинеарни и еднопосочни, т. е. че могат да се намерят два неотрицателни множителя β и γ, от които поне един е различен от нула, по такъв начин, че да имаме $\beta b = \gamma c$. Оттук следва, че могат да се намерят две неотрицателни числа λ и μ, за които

$$b = \lambda a, \qquad c = \mu a.$$

В такъв случай очевидно $\lambda + \mu = 1$.

Нека един регулярен конус K с норма $P(x)$ е компактен относно тази норма. Ако (1) е неговата база на регулярност, то при всяко цяло положително n съществуват независещи от x константи A_n, които удовлетворяват неравенствата

$$|\,F_n(x)\,| \leqq A_n\, P(x)$$

при всяко x от K. И наистина ако допуснем противното, то при някоя цяла положителна стойност на n и при всяко цяло положително ν ще може да се намери елемент x_ν, за който $P(x_\nu) \leqq 1$ и

(3) $$|\,F_n(x_\nu)\,| > \nu.$$

Редицата

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$$

е ограничена относно нормата $P(x)$. Това ни позволява да изберем от нея сходяща подредица

$$x_{\nu_1},\ x_{\nu_2},\ x_{\nu_3},\ldots$$

В такъв случай редицата

$$F_n(x_{\nu_1}),\ F_n(x_{\nu_2}),\ F_n(x_{\nu_3}),\ \ldots$$

е сходяща и следователно ограничена, което противоречи на неравенството (3).

Нека K е регулярен конус с норма $P(x)$, който е компактен относно тази норма. Да разгледаме съвкупността K_0 от елементите на K, които са подчинени на условието $P(x) \leqq 1$. Не е трудно да се види, че съвкупността K_0 е компактна. И наистина нека

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots \tag{4}$$

е една редица от елементи на K_0. От тази редица може да се избере сходяща подредица

$$x_{\nu_1},\ x_{\nu_2},\ x_{\nu_3},\ \ldots, \tag{5}$$

тъй като редицата (4) е ограничена по норма и конусът K е компактен. Да означим с x_0 границата на редицата (5). Нашата цел ще бъде постигната, ако ние покажем, че $x_0 \in K$, т. е. че $P(x_0) \leqq 1$. Това обаче следва от полунепрекъснатостта на нормата $P(x)$. И така съвкупността K_0 е наистина компактна.

Да разгледаме функцията

$$\delta(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \lambda_\nu^2}\Big[F_\nu(x) - p_\nu\Big]^2, \tag{6}$$

където положителните числа λ_ν са избрани така, че при всяко x от K да имаме

$$|F_\nu(x)| \leqq \lambda_\nu P(x),$$

а константите p_ν са избрани произволно, стига $\dfrac{p_\nu}{\lambda_\nu}$ да остава ограничено, когато ν се мени.

Очевидно редът (6) е равномерно сходящ в K_0, тъй като имаме

$$\frac{1}{2^\nu\lambda_\nu^2}\Big[F_\nu(x) - p_\nu\Big]^2 \leqq \frac{1}{2^{\nu-1}\lambda_\nu^2} F_\nu^2(x) + \frac{1}{2^{\nu-1}} \frac{p_\nu^2}{\lambda_\nu^2} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2^{\nu-1}} + \frac{1}{2^{\nu-1}} \frac{p_\nu^2}{\lambda_\nu^2}.$$

Оттук, като вземем под внимание, че функциите $F_\nu(x)$ са непрекъснати, заключаваме, че функцията $\delta(x)$ е също тъй непрекъсната и следователно притежава в компактната и ограничената относно нормата $P(x)$ съвкупност K_0 най-голяма стойност.

Дефиниция. Ще казваме, че един елемент a от K е апоедрален относно полюса* $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ и теглата λ_ν, ако $P(a) \leqq 1$ и ако функцията $\delta(x)$ добива най-голяма стойност в K_0 при $x = a$.

* Числата p_ν ще наричаме координати на полюса $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$.

От казаното по-горе е ясно, че във всеки регулярен конус с норма $P(x)$, който е компактен относно тази норма, съществува поне един апоедрален елемент, като при това полюсът може да се избира по безбройно много различни начини.

Лема 1. Ако един елемент е апоедрален относно една норма $P(x)$ на един регулярен конус, той е или неразложим* в този конус относно нормата $P(x)$, или е равен на нула.

Доказателство. Нека a е един апоедрален елемент, който съответствува на полюса $(p_1, p_2, p_3 \ldots)$ и теглата λ_ν, и нека x е произволен елемент на K, за който $P(x) \leqq 1$. Ние ще покажем, че

$$(7)\qquad 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu\lambda_\nu^2}\Big[F_\nu(a)-p_\nu\Big]\Big[F_\nu(a)-F_\nu(x)\Big] \geqq \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu\lambda_\nu^2}\Big[F_\nu(a)-F_\nu(x)\Big]^2.$$

За тази цел вземаме под внимание, че елементът a е апоедрален относно полюса $(p_1, p_2, \ldots)$ и теглата λ_ν и следователно

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu\lambda_\nu^2}\Big[F_\nu(a)-p_\nu\Big]^2 \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu\lambda_\nu^2}\Big[F_\nu(x)-p_\nu\Big]^2,$$

когато $P(x) \leqq 1$. От друга страна

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu\lambda_\nu^2}\Big[F_\nu(x)-p_\nu\Big]^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu\lambda_\nu^2}\Big[(F_\nu(x)-F_\nu(a)+F_\nu(a)-p_\nu)\Big]^2 =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu\lambda_\nu^2}\Big[F_\nu(a)-F_\nu(x)\Big]^2 +$$

$$+ 2\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu\lambda_\nu^2}\Big[F_\nu(x)-F_\nu(a)\Big]\Big[F_\nu(a)-p_\nu\Big] +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu\lambda_\nu^2}\Big[F_\nu(a)-p_\nu\Big]^2$$

и следователно

$$0 \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^\nu\lambda_\nu^2}\Big[F_\nu(x)-F_\nu(a)\Big]^2 +$$

* Нека припомним, че неразложимите елементи по дефиниция са различни от нула.

$$+ 2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu} \lambda_{\nu}^{2}} \left[F_{\nu}(x) - F_{\nu}(a) \right] \left[F_{\nu}(a) - p_{\nu} \right].$$

За да покажем, че елементът a е неразложим относно нормата $P(x)$, разглеждаме равенствата

$$a = b + c,$$
$$P(a) = P(b) + P(c),$$

където b и c са два елемента от K. Нашата цел е да покажем, че елементите b и c са колинеарни и еднопосочни с елемента a. Очевидно, без да ограничаваме общността, можем да считаме, че $P(b) \neq 0$ и $P(c) \neq 0$, защото противният случай е тривиален. Да положим $b_0 = \frac{b}{P(b)}$ и $c_0 = \frac{c}{P(c)}$. В такъв случай

$$2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu} \lambda_{\nu}^{2}} \left[F_{\nu}(a) - p_{\nu} \right] \left[F_{\nu}(a) - F_{\nu}(b_0) \right] \geqq$$

$$\geqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu} \lambda_{\nu}^{2}} \left[F_{\nu}(a) - F_{\nu}(b_0) \right]^2,$$

$$2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu} \lambda_{\nu}^{2}} \left[F_{\nu}(a) - p_{\nu} \right] \left[F_{\nu}(a) - F_{\nu}(c_0) \right] \geqq$$

$$\geqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu} \lambda_{\nu}^{2}} \left[F_{\nu}(a) - F_{\nu}(c_0) \right]^2$$

и следователно

$$P(b) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu} \lambda_{\nu}^{2}} \left[F_{\nu}(a) - F_{\nu}(b_0) \right]^2 +$$

$$+ P(c) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu} \lambda_{\nu}^{2}} \left[F_{\nu}(a) - F_{\nu}(c_0) \right]^2 \leqq$$

$$\leqq 2 P(b) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu} \lambda_{\nu}^{2}} \left[F_{\nu}(a) - p_{\nu} \right] \left[F_{\nu}(a) - F_{\nu}(b_0) \right] +$$

$$+ 2 P(c) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu} \lambda_{\nu}^{2}} \left[F_{\nu}(a) - p_{\nu} \right] \left[F_{\nu}(a) - F_{\nu}(c_0) \right] =$$

$$= 2 \left[P(a) - 1 \right] \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\nu} \lambda_{\nu}^{2}} \left[F_{\nu}(a) - p_{\nu} \right] \left[F_{\nu}(a) - F_{\nu}(0) \right] \leqq 0,$$

откъдето

$$F_\nu(a) = F_\nu(b_0), \qquad F_\nu(a) = F_\nu(c_0)$$

и следователно

$$b = P(b)\ a, \qquad c = P(c)\ a,$$

т. е. b и c са наистина колинеарни и еднопосочни с a.

Теорема 1. Нека един регулярен конус K с норма $P(x)$ е компактен относно тази норма и притежава поне един различен от нула елемент. В такъв случай този конус притежава и поне един неразложим* елемент.

Доказателство. Очевидно достатъчно е да покажем, че конусът K притежава поне един различен от нула апоедрален елемент. За тази цел разглеждаме апоедрален елемент a, чийто полюс е $(0, 0, 0, \ldots)$, и означаваме с g кой да е отличен от нула елемент на K, подчинен на условието $P(g) \leqq 1$. В такъв случай

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{F_\nu^2(a)}{2^\nu \lambda_\nu^2} \geqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{F_\nu^2(g)}{2^\nu \lambda_\nu^2} > 0$$

и следователно $a \neq 0$.

Теорема 2. Нека K е един регулярен конус с норма $P(x)$, компактен относно тази норма, и нека L е един изпъкнал, съдържащ се изцяло в K конус, който е компактен относно една негова норма $Q(x)$. Ако всичките неразложими** елементи a на K лежат в L и удовлетворяват условието $P(a) \geqq Q(a)$, то конусите K и L съвпадат и при всяко x от K имаме

$$P(x) \geqq Q(x).$$

Доказателство. Нека r е кой да е елемент на K. Нашата цел е да покажем, че $r \varepsilon L$ и $P(r) \geqq Q(r)$. При $r = 0$ това е тривиално. Ето защо ние ще предполагаме, че $r \neq 0$ и следователно $P(r) \neq 0$. Да положим

$$r_0 = \frac{r}{P(r)}.$$

Да определим положителните числа λ_ν по такъв начин, че при всяко x от K и y от L да имаме

$$|F_\nu(x)| \leqq \lambda_\nu P(x), \qquad |F_\nu(y)| \leqq \lambda_\nu Q(y).$$

Да разгледаме функцията

$$\varphi(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \lambda_\nu^2} \Big[F_\nu(y) - F_\nu(r_0) \Big]^2 \tag{8}$$

и да означим с L_0 съвкупността от онези елементи на L, които удовлетворяват условието $Q(y) \leqq 1$. Функцията $\varphi(y)$ притежава най-малка стойност в L_0, тъй като е непрекъсната (както това следва от равномерната сходимост на реда (8)), а съвкупността L_0 е компактна

* Нека припомним, че по дефиниция неразложимите елементи са различни от нула.

** От разсъжденията, които ще изложим, ще се вижда, че вместо неразложимост може да се предполага само апоедралност.

и ограничена. Нека c е такъв елемент от L_0, за който $\varphi(y)$ добива най-малка стойност. Означаваме с a апоедралния елемент на конуса K относно полюса с координати

$$p_\nu = F_\nu(r_0)\,\frac{t-1}{t} + \frac{1}{t}\,F_\nu(c) \qquad (t > 0,\ \nu = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

и теглата λ_ν. В такъв случай или a е неразложим относно K, или $a = 0$ и следователно $a \in L$ и $P(a) \geqq Q(a)$. От друга страна от дефиницията на апоедралност имаме $P(a) \leqq 1$ и следователно $Q(a) \leqq 1$. Като вземем под внимание, че конусът L е изпъкнал, заключаваме, че при всички положителни стойности на t имаме

$$\frac{c + t\,a}{1 + t} \in L_0$$

и следователно

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \lambda_\nu^2} \Big[F_\nu(r_0) - F_\nu(c) \Big]^2 \leqq$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \lambda_\nu^2} \left[F_\nu(r_0) - F_\nu\left(\frac{c + t\,a}{1 + t}\right)\right]^2,$$

откъдето

$$(1+t)^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \lambda_\nu^2} \Big[F_\nu(r_0) - F_\nu(c) \Big]^2 \leqq \tag{9}$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \lambda_\nu^2} \Big[F_\nu(r_0) - F_\nu(c) + t\,[F_\nu(r_0) - F_\nu(a)] \Big]^2.$$

От друга страна от условието за апоедралност имаме

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \lambda_\nu^2} \Big[F_\nu(r_0) - p_\nu \Big]^2 \leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \lambda_\nu^2} \Big[F_\nu(a) - p_\nu \Big]^2$$

или което е същото,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \lambda_\nu^2} \Big[F_\nu(r_0) - F_\nu(c) \Big]^2 \leqq \tag{10}$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \lambda_\nu^2} \Big[F_\nu(r_0) - F_\nu(c) - t\,[F_\nu(r_0) - F_\nu(a)] \Big]^2.$$

Събираме почленно (9) и (10). Това ни дава

$$(2 + t) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \lambda_\nu^2} \Big[F_\nu(r_0) - F_\nu(c) \Big]^2 \leqq$$

$$\leqq 2\,t \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \lambda_\nu^2} \left[F_\nu(r_0) - F_\nu(a) \right]^2,$$

откъдето, като оставим t да клони към нула, получаваме

$$2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu \lambda_\nu^2} \left[F_\nu(r_0) - F_\nu(c) \right]^2 \leqq 0$$

и следователно

$$F_\nu(r_0) = F_\nu(c), \qquad \nu = 1, 2, 3 \ldots$$

Оттук заключаваме, че $r_0 = c$, т. е. $r_0 \varepsilon L$, и следователно $r \varepsilon L$.

От друга страна имаме $Q(c) \leqq 1$ или което е същото, $Q(r_0) \leqq 1$, т. е. $Q\left(\frac{r}{P(r)}\right) \leqq 1$, и следователно $Q(r) \leqq P(r)$. С това всичко е доказано.

Забележка. Теоремите 1 и 2 запазват своята валидност и тогава, когато функциите $F_\nu(x)$ от базата (1) на конуса K приемат комплексни стойности. За да се убедим в това, достатъчно е да дефинираме редицата

$$\Phi_1(x),\ \Phi_2(x),\ \ldots$$

с условията

$$\Phi_{2\nu}(x) = F_\nu(x) + \overline{F}_\nu(x), \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\Phi_{2\nu-1}(x) = i\left[\overline{F}_\nu(x) - F_\nu(x) \right], \qquad \nu = 1, 2, 3, \ldots,$$

за да имаме в конуса K база от реални функции, относно която конусите K и L са все още компактни.

Примери

1. Да означим с K конуса от безкрайните редици

(11) $$a = (a_0, a_1, a_2, \ldots),$$

които удовлетворяват условието на Хаусдорф

(12) $$\mu_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left| \Delta^{n-\nu} a_\nu \right| \leqq A \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)^*,$$

където константата A не зависи от n, и да означим с L конуса от редиците (11), които допускат представяне от вида

(13) $$a_\nu = \int_0^1 t^\nu \, d\alpha(t),$$

* Символът $\Delta^n a_\nu$ се дефинира рекурентно така:

$$\Delta^0 a_\nu = a_\nu, \quad \Delta^{n+1} a_\nu = \Delta^n a_{\nu+1} - \Delta^n a_\nu.$$

където $0^0 = 1$, а функцията $\alpha(t)$ има ограничена вариация в интервала $[0, 1]$ и е нормирана с условието

$$\alpha(t) = \frac{\alpha(t+0) + \alpha(t-0)}{2}.$$

Конусът K е регулярен относно базата

$$F_\nu(a) = a_\nu.$$

Конусът L е очевидно изпъкнал и се съдържа изцяло в конуса K. Нека положим

$$Q(a) = V_0^1 \left[\alpha(t) \right].$$

Не е трудно да се провери, че тази функция представлява една норма на конуса L и този конус е компактен относно нея.

Да разгледаме сумата

$$\mu_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left| \Delta^{n-\nu} a_\nu \right|.$$

Очевидно

$$(14) \qquad \mu_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left| \Delta^{n-\nu} a_{\nu+1} - \Delta^{n+1-\nu} a_\nu \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left| \Delta^{n-\nu} a_{\nu+1} \right| + \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left| \Delta^{n+1-\nu} a_\nu \right| =$$

$$= \binom{n}{n} \left| \Delta^0 a_{n+1} \right| + \binom{n}{0} \left| \Delta^{n+1} a_0 \right| + \sum_{\nu=1}^{n} \left[\binom{n}{\nu} + \binom{n}{\nu-1} \right] \left| \Delta^{n+1-\nu} a_\nu \right| =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} \left| \Delta^{n+1-\nu} a_\nu \right| = \mu_{n+1}.$$

Оттук заключаваме, че ограничената редица

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$$

е монотонно растяща и следователно е сходяща. Да положим

$$P(a) = \lim \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left| \Delta^{n-\nu} a_\nu \right|.$$

Не е трудно да се покаже, че функцията $P(x)$ е една норма на конуса K и конусът K е компактен относно нея.

Ние ще намерим неразложимите относно нормата $P(x)$ елементи на конуса K. За тази цел полагаме

$$b_n = a_{n+1}, \quad c_n = a_n - a_{n+1}$$

и разглеждаме двете редици

$$b = (b_0, b_1, b_2, \ldots), \quad c = (c_0, c_1, c_2, \ldots).$$

В такъв случай очевидно $a = b + c$.

От друга страна зависимостите (14) ни дават

$$(15)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left| \Delta^{n-\nu} a_\nu \right| \leqq \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left| \Delta^{n-\nu} b_\nu \right| +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left| \Delta^{n-\nu} c_\nu \right| = \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} \left| \Delta^{n+1-\nu} a_\nu \right|.$$

Оттук заключаваме, че b и c принадлежат на K. От друга страна, като оставим n да расте неограничено, получаваме от (15) равенството

$$P(a) = P(b) + P(c).$$

Нека елементът a е неразложим. В такъв случай може да се намери такова число λ от интервала $[0,1]$, че да имаме $b = \lambda a$, т. е.

$$a_{n+1} = \lambda a_n,$$

и следователно при $\lambda \neq 0$ имаме

$$a_n = \lambda^n a_0,$$

а при $\lambda = 0$ имаме

$$a_0 \neq 0, \ a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 0.$$

Тези неразложими елементи очевидно принадлежат на конуса L. От друга страна не е трудно да се види, че за тях имаме $P(a) = |a_0|$ и $Q|a| = |a_0|$ и следователно $P(a) = Q(a)$. Това ни позволява да заключим с помощта на теорема 2, че $K \equiv L$, т. е. че всяка редица, която удовлетворява условието (12), допуска интегрално представяне от вида (13). Този резултат съставлява съдържанието на една известна теорема на Хаусдорф за моментите.

Нека редицата

$$a = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

удовлетворява условието на Хаусдорф за позитивност

$$(-1)^n \Delta^n a_\nu \geqq 0, \ n = 0, 1, 2, \ldots, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

В такъв случай

$$(16)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left| \Delta^{n-\nu} a_\nu \right| = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \Delta^{n-\nu} a_\nu = a_0$$

и следователно редицата a допуска представяне от вида (13). От друга страна равенството (16) ни дава

$$P(a) = a_0,$$

т. е.

$$P(a) = \alpha(1) - \alpha(0),$$

а теорема 2 ни позволява да заключим*, че $Q(a) \leqq P(a)$. По такъв начин получаваме

$$V_0^1 [\alpha(t)] \leqq \alpha(1) - \alpha(0).$$

---

* Неравенството $Q(a) \leqq P(a)$ е валидно при всяко a от K, а не само при позитивните редици. От друга страна по тривиални съображения се вижда, че $P(a) \leqq Q(a)$. Оттук заключаваме, че при всяко a от K имаме $P(a) = Q(a)$.

Оттук ние можем без всякакъв труд да заключим, че функцията $\alpha(t)$ е монотонно растяща. И наистина нека $0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq 1$. В такъв случай

$$|\alpha(t_1) - \alpha(0)| + |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| + \\ + |\alpha(1) - \alpha(0)| \leqq V_0^1[\alpha(t)] \leqq \alpha(1) - \alpha(0).$$

От друга страна

$$[\alpha(t_1) - \alpha(0)] + [\alpha(t_2) - \alpha(t_1)] + [\alpha(1) - \alpha(0)] = \alpha(1) - \alpha(0)$$

и следователно

$$\begin{aligned} &|\alpha(t_1) - \alpha(0)| - [\alpha(t_1) - \alpha(0)] + \\ &+ |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| - [\alpha(t_2) - \alpha(t_1)] + \\ &+ |\alpha(1) - \alpha(0)| - [\alpha(1) - \alpha(0)] \leqq 0. \end{aligned}$$

Оттук заключаваме, че

$$\alpha(t_2) - \alpha(t_1) = |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| \geqq 0,$$

т. е. функцията $\alpha(t)$ е наистина монотонно растяща. По такъв начин ние получихме и позитивната теорема за моментите на Хаусдорф.

2. Да разгледаме конуса K от функциите, които са дефинирани при $x > 0$, притежават производни от всякакъв ред и удовлетворяват условието на Видер

$$\frac{1}{n!}\int_0^\infty t^n \left| f^{(n+1)}(t) \right| dt \leqq A, \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

където константата A не зависи от n. Ако две функции от K се различават с константа, ние ще ги разглеждаме като неразлични. Нека

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

е редицата на положителните рационални числа. Конусът K е регулярен относно базата

$$F_\nu(f) = f'(r_\nu).$$

Не е трудно да се убедим, че редицата с общ член

$$p_n = \frac{1}{n!}\int_0^\infty t^n \left| f^{(n+1)}(t) \right| dt$$

е монотонно растяща. И наистина интегралът

$$\int_t^\infty \left| f^{(n+1)}(s) \right| ds$$

е сходящ при всяко положително t, защото при $s \geqq t$

$$\left| f^{(n+1)}(s) \right| \leqq \frac{1}{t^n} \cdot s^n \left| f^{(n+1)}(s) \right|.$$

Оттук заключаваме, че при $t > 0$ имаме

$$C - f^{(n)}(t) = \int_t^\infty f^{(n+1)}(s)\, ds.$$

Стойността на константата C може да се пресметне при $n=1, 2, 3, \ldots$ Така при $t \geqq 1$ имаме

$$\left| C t^{n-2} \right| = \left| t^{n-2} f^{(n)}(t) + t^{n-2} \int_t^\infty f^{(n+1)}(s)\, ds \right| \leqq$$

$$\leqq t^{n-2} \left| f^{(n)}(t) \right| + \frac{1}{t^2} \int_t^\infty s^n \left| f^{(n+1)}(s) \right| ds \leqq$$

$$\leqq t^{n-1} \left| f^{(n)}(t) \right| + \frac{n!\, A}{t^2}$$

и следователно интегралът

$$\int_1^\infty \frac{C}{t^{2-n}}\, dt$$

е сходящ, нещо, което е възможно само при $C=0$, защото $2-n \leqq 1$. И така при $n=1, 2, 3, \ldots$ получаваме

$$f^{(n)}(t) = -\int_t^\infty f^{(n+1)}(s)\, ds. \tag{17}$$

Този резултат ни позволява да пишем при $n=1, 2, 3, \ldots$ и $0 < \varepsilon < p < \infty$ следното:

$$p_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_\varepsilon^p t^{n-1} \left| f^{(n)}(t) \right| dt =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_\varepsilon^p t^{n-1} \left| \int_t^\infty f^{(n+1)}(s)\, ds \right| \leqq \frac{1}{(n-1)!} \int_\varepsilon^p t^{n-1} \int_t^\infty \left| f^{(n+1)}(s) \right| ds =$$

$$= \frac{1}{n!} p^n \int_p^\infty \left| f^{(n+1)}(s) \right| ds - \frac{1}{n!} \varepsilon^n \int_\varepsilon^\infty \left| f^{(n+1)}(s) \right| ds +$$

$$+ \frac{1}{n!} \int_\varepsilon^p t^n \left| f^{(n+1)}(t) \right| dt \leqq \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n \left| f^{(n+1)}(t) \right| dt = p_n,$$

което показва, че редицата с общ член p_n е наистина монотонно растяща.

Нека положим

$$P(f) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n \left| f^{(n+1)}(t) \right| dt.$$

Не е трудно да се убедим, че така дефинираният функционал $P(f)$ представлява една норма на конуса K.

Равенството (17) ни позволява да заключим, че при $t > 0$ имаме

$$\left| f^{(n)}(t) \right| \leqq t^{-n} \int_t^\infty s^n \left| f^{(n+1)}(s) \right| \, dt \leqq \frac{n!\, P(f)}{t^n},$$

от което следва без всякакъв труд с помощта на теоремата на Арцела — Асколи, че конусът K е компактен относно нормата $P(f)$.

Ние ще си поставим за задача да намерим неразложимите елементи на конуса K относно нормата $P(f)$. За тази цел избираме $\alpha > 0$ и разглеждаме следната верига от неравенства и равенства (в които $0 < \varepsilon < p < \infty$):

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_\varepsilon^p t^{n-1} \left| f^{(n)}(t) \right| dt \leqq \frac{1}{(n-1)!} \int_\varepsilon^p t^{n-1} \left| f^{(n)}(t) - f^{(n)}(t+\alpha) \right| dt +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \int_\varepsilon^p t^{n-1} \left| f^{(n)}(t+\alpha) \right| dt =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_\varepsilon^p t^{n-1} \left| \int_t^{t+\alpha} f^{(n+1)}(s)\, ds \right| +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \int_\varepsilon^p t^{n-1} \left| \int_{t+\alpha}^\infty f^{(n+1)}(s) ds \right| \leqq \frac{1}{(n-1)!} \int_\varepsilon^p t^{n-1} \int_t^{t+\alpha} \left| f^{(n+1)}(s) \right| ds +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} \int_\varepsilon^p \int_{t+\alpha}^\infty \left| f^{(n+1)}(s) \right| ds = \frac{1}{(n-1)!} \int_\varepsilon^p t^{n-1} \int_t^\infty \left| f^{(n+1)}(s) \right| ds =$$

$$= \frac{1}{n!} p^n \int_p^\infty \left| f^{(n+1)}(s) \right| ds - \frac{\varepsilon^n}{n!} \int_\varepsilon^\infty \left| f^{(n+1)}(s) \right| ds +$$

$$+ \frac{1}{n!} \int_\varepsilon^p t^n \left| f^{(n+1)}(t) \right| dt \leqq \frac{1}{n!} \int_0^\infty t^n \left| f^{(n+1)}(t) \right| dt.$$

Оттук като оставим ε да клони към нула и p да расте неограничено, получаваме неравенствата

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty t^{n-1} \left| f^{(n)}(t) \right| dt \leqq \tag{18}$$

$$\leqq \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1} \left| f^{(n)}(t) - f^{(n)}(t+\alpha)\right| dt +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty t^{n-1} \left| f^{(n)}(t+\alpha)\right| dt \leqq \frac{1}{n!}\int_0^\infty t^n \left| f^{(n+1)}(t)\right| dt.$$

Разглеждаме функциите

$$g(x) = f(x+\alpha),\ h(x) = f(x) - f(x+\alpha).$$

Неравенствата (18) ни учат, че функциите $g(x)$ и $h(x)$ принадлежат на K. Оставяме в неравенствата (18) цялото положително число n да расте неограничено. Това ни дава

$$P(f) = P(g) + P(h).$$

Този резултат и равенството

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

ни учат, че всяка неразложима функция $f(x)$ на конуса K удовлетворява уравнението

$$f(x+\alpha) - \lambda(\alpha) f(x) = A(\alpha),$$

където $A(\alpha)$ и $\lambda(\alpha)$ не зависят от x и $0 \leqq \lambda(\alpha) \leqq 1$. Оттук намираме лесно, че неразложимите елементи на K имат вида

$$f(x) = B e^{-tx} + C,$$

където B, C и t са константи и $t > 0$.

Така полученият резултат ни дава едно доказателство на известната теорема на Видер, според която функциите от K могат да се представят във вида

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, d\alpha(t),$$

където функцията $\alpha(t)$ има ограничена вариация.

Разсъжденията, с помощта на които ние по-горе получихме теоремата на Хаусдорф за позитивните редици като следствие от общата теорема на Хаусдорф за моментите, ни позволяват тук да получим съответната теорема на С. Н. Бернщайн за регулярно монотонните функции.

Постъпила на 21. II. 1954 г.

ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА

1. H. Minkowski — Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs, Gesammelte Abhandlungen, т. II, стр. 131—229.
2. ДАН, т. **28**, стр. 18—22, (1940).
3. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер — Функциональный анализ в полуупорядоченых пространствах, 1950, стр. 104 и стр. 105.
4. Acta Scientiarum Mathematicarum, Szeged, **т. 12** A, (1950), стр. 228—238; Comentarii Helvetici, т. **17**, (1944—45), стр. 209.
5. Математический сборник, **13** (55), (1943), 301—316; Успехи математических наук 1 : 2, (**12**), (1946), стр. 48—146.
6. Ann. of Math., **29** (1927—1928), 255—275.
7. Зап. каф. матем. физ. АН СССР, **3**, (1937).
8. Studia Math. **9**, (1940), 133—138.
9. ДАН, **27**, (1940), 427—431.
10. Ж. ин-та матем. АН СССР, **9**, (1947), 130—139.
11. ДАН, **42**, (1944), 203—205.
12. ДАН, **60**, (1948), 25—27.
13. N. Bourbaki — Eléments de mathématique, XV, livre V.
14. Годишник на Соф. унив., т. 47, (1950—51) и (1951—52), стр. 85—107; Известия на Мат. инст. при БАН, т. **1**, (1953), стр. 56—68.

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ О НЕРАЗЛОЖИМОСТИ

Я. А. Тагамлицкий

РЕЗЮМЕ

Обозначим через K некоторый абстрактный нормированный конус и через $P(f)$ одну из его норм. Автор называет элемент f конуса K неразложимым относительно нормы $P(f)$, если $f \neq 0$, но условия

$$f = g + h, \quad g \in K, \quad h \in K,$$
$$P(f) = P(g) + P(h)$$

выполняются только при

$$g = \lambda f,$$
$$h = \mu f,$$

где λ и μ неотрицательные числа.

В настоящей работе автор расширяет полученные им ранее [14] результаты, относящиеся к неразложимости в обычном смысле, и указывает на некоторые приложения.