БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИЗВЕСТИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ · ТОМ VI

ВЪРХУ НЕРАЗЛОЖИМИТЕ ЕЛЕМЕНТИ НА НЯКОИ КОНУСИ ОТ АНАЛИТИЧНИ ФУНКЦИИ

Я. Тагамлицки

1. Нека G е просто свързана отворена област в комплексната равнина и K е конусът на функциите $f(z)$, които са холоморфни и еднолистни в G, които имат положителна реална част и които са нормирани с условието $\operatorname{Im}(f(z_0))=0$, където z_0 е вътрешна точка на G. Не е трудно да се види, че конусът K не е празен. За да се убедим в това, тъчно е да изобразим G по познати пътища конформно върху огранич област G_1 и след това да изобразим кой да е кръг, който съдържа G_1 във вътрешността си, върху полуравнината, която се намира от дясната страна на ординатната ос.

Полагаме

$$P(f)=f(z_0).$$

Очевидно $P(f)$ е един реален функционал, защото $\operatorname{Im}(f(z_0))=0$. Този функционал е линеен и е способен да приема само положителни стойности, защото $f(z_0)=\operatorname{Re}(f(z_0))>0$. По такъв начин ние получихме в K една линейна норма. От друга страна, конусът K представлява очевидно една нормална фамилия и следователно единичната сфера $P(f)\leqq 1$, допълнена с нулевия елемент, е компактна относно обичайната сходимост. Това обстоятелство ни позволява да твърдим, че конусът K има поне един неразложим елемент. Нашата задача ще бъде да изучим по-подробно неразложимите елементи на K.

Теорема 1. *За да бъде една функция $f(z)$ от K неразложима в K, е необходимо и достатъчно тя да изобразява G върху цялата полуравнина, която се намира от дясната страна на ординатната ос.*

Доказателство. Ние ще установим първо необходимостта на условието.

И така нека $f(z)$ е неразложим елемент на K. Ние ще покажем, че всяко комплексно число с положителна реална част е функционална стойност на $f(z)$. Доказателството ще извършим, като допуснем противното. Нека числото $\alpha=a+bi$, където $a>0$, не е функционална стойност на $f(z)$. В такъв случай аналитичната функция

$$g(z)=\frac{f(z)-bi\pm\sqrt{(f(z)-\alpha)\,(f(z)+\bar{\alpha})}}{2} \tag{1}$$

няма особени точки в G. И наистина $f(z)$ не приема стойността α съгласно направеното предположение и не приема стойността $-\bar{\alpha}$, защото $\mathrm{Re}(f(z))>0$. По такъв начин

$$(f(z)-\alpha)(f(z)+\bar{\alpha})\neq 0$$

и следователно $g(z)$ няма особени точки в G. От друга страна, областта G е просто свързана и следователно функцията $g(z)$ притежава еднозначен клон в G. Ние ще изберем един такъв клон, ще запазим за него означението $g(z)$ и ще положим

$$h(z)=\frac{f(z)-bi-\sqrt{(f(z)-\alpha)(f(z)+\bar{\alpha})}}{2}.$$

Така дефинираните функции $g(z)$ и $h(z)$ очевидно удовлетворяват уравненията

$$4g^2(z)-4g(z)\,(f(z)-bi)+a^2=0,$$

$$4h^2(z)-4h(z)\,(f(z)-bi)+a^2=0,$$

както това се вижда с непосредствено пресмятане. От така получените зависимости се вижда, че функциите $g(z)$ и $h(z)$ не се анулират, защото $a\neq 0$. Това обстоятелство ни позволява да пишем

$$g(z)+\frac{a^2}{4g(z)}+bi=f(z), \tag{2}$$

$$h(z)+\frac{a^2}{4h(z)}+bi=f(z). \tag{3}$$

Не е трудно да се види, че така дефинираните функции $g(z)$ и $h(z)$ са еднолистни. Ще покажем това например за функцията $g(z)$. И наистина да допуснем, че

$$g(z_1)=g(z_2),\ z_1\in G,\ z_2\in G.$$

В такъв случай от (2) получаваме

$$f(z_1)=f(z_2),$$

което е възможно само при $z_1=z_2$, защото функцията $f(z)$ е еднолистна. Еднолистността на $h(z)$ се вижда по същия начин. Не е трудно да се види, че функциите $g(z)$ и $h(z)$ имат положителна реална част. Ще покажем това например за функцията $g(z)$ по следния начин. От (2) имаме

$$g(z)+\frac{a^2\overline{g(z)}}{4g(z)\overline{g(z)}}+bi=f(z)$$

и следователно

$$\mathrm{Re}\,(g(z))+\frac{a^2}{4|g(z)|^2}\,\mathrm{Re}\,(\overline{g(z)})=\mathrm{Re}\,(f(z))$$

или още

$$\mathrm{Re}\,(g(z))\left(1+\frac{a^2}{4|g(z)|^2}\right)=\mathrm{Re}\,(f(z))>0$$

и следователно

$$\mathrm{Re}\,(g(z))>0.$$

Неравенството $\mathrm{Re}\,(h(z))>0$ се установява по същия начин.

Макар че функциите $g(z)$ и $h(z)$ са еднолистни и имат положителна реална част, те изобщо могат да не принадлежат на K, защото не са задължени да имат реална стойност в точката z_0. Поради това ние ще въведем функциите

$$g_1(z)=g(z)+ip,$$
$$h_1(z)=h(z)+iq,$$

където реалните числа p и q се избират така, че числата $g_1(z_0)$ и $h_1(z)$ да бъдат реални. Очевидно функциите $g_1(z)$ и $h_1(z)$ принадлежат на K От друга страна,

$$g_1(z)+h_1(z)=f(z)-ib+ip+iq$$

и тъй като трите числа $g_1(z_0)$, $h_1(z_0)$ и $f(z_0)$ са реални, то $-b+p+q=0$ т. е.

$$f(z)=g_1(z)+h_1(z).$$

По такъв начин ние разложихме $f(z)$ на сума от две функции от K. Функцията $f(z)$ обаче е неразложима и следователно съществува такова реално неотрицателно число λ, че при всяко z от G да имаме

$$g_1(z)=\lambda f(z)$$

т. е.

$$g(z)+ip=\lambda f(z),$$

което заедно с (2) ни дава

$$4(\lambda-1)d^2(z)+4(\lambda b-p)ig(z)+\lambda a^2=0.$$

По такъв начин ние получихме едно квадратно уравнение относно $g(z)$ в което поне един от двата коефициента $4(\lambda-1)$ и λa^2 е различен от нула, защото $a\neq 0$. От това следва, че функцията $g(z)$ не може да приема повече от две различни стойности в G. Достатъчно е сега да вземем под внимание, че функцията $g(z)$ е аналитична, за да заключим, че е константа, което не е вярно, защото тя е еднолистна. По такъв начин ние достигнахме до противоречие, с което необходимостта на условието е установена.

Сега ще установим достатъчността на условието, т. е. ще покажем, че ако $f(z)$ принадлежи на K и изобразява G върху цялата полуравнина, която се намира от дясната страна на ординатната ос, то $f(z)$ е неразложим елемент на G. За да покажем това, ще вземем под внимание, както вече споменахме по-горе, че в K неразложим елемент сигурно има, защото единичната сфера $P(f)=1$, допълнена с нулевия елемент, е компактна относно обичайната сходимост. Нека $f_0(z)$ е един неразложим елемент на K. Ще покажем, че функцията $f(z)$ е също неразложима. И наистина нека

$$f(z)=g(z)+h(z),$$

където $g(z)\in K$ и $h(z)\in K$. Нека z_1 е точка от G. Реалната част на $f_0(z_1)$ е положителна, защото $f_0(z)\in K$ и следователно може да се намери точка z_2 в G по такъв начин, че да имаме

$$f(z_2)=f_0(z_1). \tag{4}$$

Равенството (4) заедно с равенството

$$f(z_2)=g(z_2)+h(z_2)$$

ни дава

(5) $$f_0(z_1)=g(z_2)+h(z_2).$$

Нека $F(u)$ е обратната функция на $f(z)$. Функцията $F(u)$ е холоморфна, защото $f(z)$ е еднолистна. Дефиниционната област на $F(u)$ съвпада със съвкупността от функционалните стойности на $f(z)$, т. е. е точно полуравнината, която се намира от дясната страна на ординатната ос. От $z=F(f(z))$ и (4) имаме

$$z_2=F(f_0(z_1))$$

и следователно (5) може да се напише във вида

$$f_0(z_1)=g(F(f_0(z_1)))+h(F(f_0(z_1))).$$

Точката z_1 обаче е избрана произволно в G. По такъв начин $f_0(z)$ е разложена на сума от две еднолистни функции с положителна реална част. За да разложим $f_0(z)$ на две събираеми от K, достатъчно е да въведем двете функции

$$g_1(z)=g(F(f_0(z)))+ip,$$

$$h_1(z)=h(F(f_0(z)))+ig,$$

където реалните числа p и g се избират така, че числата $g_1(z_0)$ и $h_1(z_0)$ да бъдат реални. В такъв случай ще имаме

$$f_0(z)+ip+ig=g_1(z)+h_1(z)$$

и като вземем под внимание, че числата $g_1(z_0)$, $h_1(z_0)$ и $f_0(z_0)$ са реални, получаваме $p+q=0$ и следователно

$$f_0(z)=g_1(z)+h_1(z).$$

По такъв начин ние разложихме $f_0(z)$ на две събираеми от K. От друга страна, функцията $f_0(z)$ е неразложима и следователно съществува неотрицателно число λ, за което е изпълнено при всяко z от G равенството

$$g_1(z)=\lambda f_0(z)$$

или още

(6) $$g(F(f_0(z)))+ip=\lambda f_0(z).$$

Да изберем точката z_3 произволно в G и да определим z_4 по такъв начин, че да имаме $f(z_3)=f_0(z_4)$. Това е възможно, защото $\operatorname{Re}(f(z_3))>0$, а функцията $f_0(z)$ е неразложима и следователно съгласно доказаното по-горе всяко комплексно число с положителна реална част е неговата функционална стойност. От (6) получаваме

$$g(F(f_0(z_4)))+ip=\lambda f_0(z_4)$$

и следователно

$$g(F(f(z_3)))+ip=\lambda f(z_3)$$

или

(7) $$g(z_3)+ip=\lambda f(z_3),$$

защото $F(f(z_3))=z_3$. Равенството (7) е установено при всяко z_3 от G. Специално при $z_3=z_0$ получаваме

$$g(z_0)=ip=\lambda f(z_0)$$

и следователно $p=0$, защото числата $g(z_0)$, λ и $f(z_0)$ са реални. По такъв начин окончателно получаваме при всяко z от G равенството

$$g(z)=\lambda f(z),$$

с което е установена неразложимостта на $f(z)$.

Приложение. Нека $f_0(z)$ е даден неразложим елемент на K. Такъв елемент, както вече отбелязахме, сигурно има. Съгласно доказаното $f_0(z)$ изобразява областта G конформно върху полуравнината, която е съставена от комплексните числа с положителна реална част. По такъв начин ние получихме теоремата на Риман, според която всяка просто свързана област може да се изобрази конформно върху кръгова област.

2. Нека S е конусът на еднолистните аналитични функции $f(z)$ в единичния кръг $|z|<1$, които са реални, т. е. за реални стойности на z приемат реални стойности, и са нормирани с условията $f(0)=0$ и $f'(0)>0$. Очевидно единичната сфера $f'(0)\leq 1$, допълнена с нулевия елемент, е компактна относно обичайната сходимост. От това следва, че в S сигурно има неразложими елементи. Ние ще си поставим за задача да изучим по-отблизо тези неразложими елементи.

Теорема. *Неразложимите в S функции $f(z)$ имат вида*

$$f(z)=\frac{Cz}{1-2tz+z^2}, \tag{8}$$

където $-1\leq t\leq 1$ и $C>0$, и, обратно, функциите от вида (8) *са неразложими в S.*

Доказателство. Първо ще установим, че неразложимите елементи на S имат вида (8). И наистина нека $f(z)$ е неразложим елемент на S. Ще покажем, че всяко комплексно число, чиято имагинерна част е различна от нула, е функционална стойност на $f(z)$. Да допуснем противното. Нека $\alpha=a+bi$, където $b\neq 0$ не е функционална стойност на $f(z)$. Тогава числото $\bar{\alpha}=a-bi$ също не е функционална стойност на $f(z)$, защото функцията $f(z)$ е реална. Да разгледаме функцията

$$g(z)=\frac{f(z)-a+\sqrt{(f(z)-\alpha)(f(z)-\bar{\alpha})}}{2}.$$

Тази функция няма особени точки в кръга $|z|>1$, защото

$$(f(z)-\alpha)(f(z)-\bar{\alpha})\neq 0$$

и следователно притежава в него еднозначен клон. Ние ще изберем такъв клон, ще запазим за него означението $g(z)$ и ще положим

$$h(z)=\frac{f(z)-a-\sqrt{(f(z)-\alpha)(f(z)-\bar{\alpha})}}{2}.$$

След прости пресмятания получаваме

$$4g^2(z)-4g(z)\left(f(z)-\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}\right)+\frac{(\alpha-\bar{\alpha})^2}{4}=0, \tag{9}$$

$$4h^2(z)-4h(z)\left(f(z)-\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}\right)+\frac{(\alpha-\bar{\alpha})^2}{4}=0. \tag{10}$$

От тези равенства се вижда, че функциите $g(z)$ и $h(z)$ при реални стойности на z приемат реални стойности, защото дискриминантата

$$4f^2(z)-4(\alpha+\bar{\alpha})f(z)+4\alpha\bar{\alpha}$$

на квадратните уравнения (9) и (10) е положителна, тъй като представлява квадратен тричлен на $f(z)$ с отрицателна дискриминанта

$$4(\alpha-\bar{\alpha})^2$$

и положителен свободен член. От равенствата (9) и (10) се вижда също тъй, че функциите $g(z)$ и $h(z)$ не се анулират, защото $\bar{\alpha}\neq\alpha$. От (9) и (10) получаваме

$$g(z)+\frac{(\alpha-\bar{\alpha})^2}{16g(z)}+\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}=f(z), \tag{11}$$

$$h(z)+\frac{(\alpha-\bar{\alpha})^2}{16h(z)}+\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}=f(z), \tag{12}$$

което ни учи, че функциите $g(z)$ и $h(z)$ са еднолистни. И наистина да допуснем например, че $g(z_1)=g(z_2)$, където $|z_1|<1$ и $|z_2|<1$. В такъв случай от (11) получаваме $f(z_1)=f(z_2)$ и следователно $z_1=z_2$, защото функцията $f(z)$ е еднолистна. Еднолистността на $h(z)$ е също тъй очевидна. Да пресметнем $g'(0)$ и $h'(0)$. От (11) и (12) намираме

$$g'(0)-\frac{(\alpha-\bar{\alpha})^2}{16g^2(0)}g'(0)=f'(0),$$

$$h'(0)-\frac{(\alpha-\bar{\alpha})^2}{16h^2(0)}h'(0)=f'(0).$$

Това пресмятане може да се извърши, защото, както вече отбелязахме, $g(0)\neq 0$ и $h(0)\neq 0$. По такъв начин получаваме

$$g'(0)>0, \tag{13}$$

$$h'(0)>0, \tag{14}$$

защото $-(\alpha-\bar{\alpha})^2>0$.

Функциите $g(z)$ и $h(z)$ са реални, еднолистни и удовлетворяват условията (13) и (14), обаче те не принадлежат на S, защото не се анулират в началото. Поради това ние ще въведем функциите

$$g_1(z)=g(z)-g(0),$$
$$h_1(z)=h(z)-h(0),$$

които принадлежат на S. Очевидно имаме

$$f(z)=g_1(z)+h_1(z).$$

От друга страна, функцията $f(z)$ е неразложима в S.

Това ни дава възможност да пишем

$$g_1(z)=\lambda f(z),$$

където λ е неотрицателна константа. От това равенство и от (11) получаваме

$$(15) \qquad 16(1-\lambda)g^2(z)-[16g(0)+8\lambda(\alpha+\bar{\alpha})]g(z)-\lambda(\alpha-\bar{\alpha})^2=0,$$

което е едно квадратно уравнение относно $g(z)$. По такъв начин функцията $g(z)$ не може да приема повече от две различни стойности, защото поне един от двата коефициента $16(1-\lambda)$ и $-\lambda(\alpha-\bar{\alpha})^2$ на квадратното уравнение (15) е различен от нула. По такъв начин ние достигнахме до противоречие, защото функцията $g(z)$ е еднолистна и следователно приема безбройно много стойности. По такъв начин ние доказахме, че функцията $f(z)$ приема всяка комплексна стойност, чиято имагинерна част е различна от нула. Общият вид на еднолистните в единичния кръг функции с това свойство е обаче известен. Това са функциите от вида (8). С това първата част на интересуващата ни теорема е доказана.

Сега ще покажем, че функциите от вида (8) са неразложими в S. Това може да стане по различни начини. Ние ще изложим следното съвсем елементарно доказателство.

Избираме произволно реално число t_0 в затворения интервал $-1\leq t\leq 1$ и разглеждаме в този интервал функцията

$$\varphi(t)=\frac{a}{1-2at+a^2}-\frac{\lambda b}{1-2bt+b^2},$$

където числата a, b и λ са реални, $a+b\neq 2t_0$ и $0<a<b<1$. В такъв случай

$$\varphi'(t)=\frac{2a^2}{(1-2at+a^2)^2}-\frac{2\lambda b^2}{(1-2bt+b^2)^2}.$$

Избираме числото λ така, че да имаме $\varphi'(t_0)=0$. Това може да се направи, защото $b\neq 0$. Не е трудно да се убедим, че при този избор на λ производната $\varphi'(t)$ не се анулира в интервала $-1\leq t\leq 1$ в точки, различни от t_0, и наистина от $\varphi'(t)=0$ имаме

$$\frac{a}{1-2at+a^2}=\frac{b\sqrt{\lambda}}{1-2bt+b^2}$$

или още

$$a+ab^2-b(1+a^2)\sqrt{\lambda}+2ab(\sqrt{\lambda}-1)t=0.$$

По такъв начин ние получихме линейно уравнение относно t, поне един от коефициентите на което е различен от нула. И така $\varphi'(t)$ се анулира в интервала $-1\leq t\leq 1$ само в точката t_0. От друга страна, с непосредствено пресмятане се убеждаваме, че $\varphi''(t_0)\neq 0$, защото $a+b\neq 2t_0$. По такъв начин ние добиваме възможност да твърдим, че функцията $\varphi(t)$ приема в точката t_0 стойност, която е или строго по-голяма от всичките останали функционални стойности в интервала $-1\leq t\leq 1$, или строго по-малка. Ние ще разгледаме случая, когато стойността $\varphi(t_0)$ е най-голяма. Случаят, когато тя е най-малка, се разглежда по същия начин.

Да образуваме линейния функционал

$$F(f)=f(a)-\lambda f(b)$$

и да означим с L максималната стойност, която той добива в единичната сфера $f'(0)\leq 1$ на S. По такъв начин при всяко $f(z)$ от S имаме

$$F(f)\leq Lf'(0).$$

Да разгледаме конуса S, който е съставен от онези функции на S, за които е изпълнено равенството

$$F(f)=Lf'(0).$$

Този конус очевидно не е празен и притежава неразложим елемент, защото единичната сфера $f'(0)\leqq 1$ на S, допълнена с нулевия елемент, е компактна относно обичайната сходимост, а следователно сечението ѝ с конуса S_1, допълнено с нулевия елемент, е също тъй компактно. Нека $f_0(z)$ е един неразложим елемент на S_1. Ще покажем, че той е неразложим и в S. И наистина нека

$$f_0(z)=g(z)+h(z),$$

където $h(z)\in S$ и $h(z)\in S$. В такъв случай

$$F(f_0)=F(g)+F(h),$$

$$f_0'(0)=g'(0)+h'(0)$$

и следователно

$$Lf_0'(0)-F(f_0)=[Lg'(0)-F(g)]+[Lh'(0)-F(h)].$$

От друга страна,

$$Lf_0'(0)-F(f_0)=0,$$

$$Lg'(0)-F(g)\geqq 0,$$

$$Lh'(0)-F(h)\geqq 0$$

и следователно $F(g)=Lg'(0)$ и $F(h)=Lh'(0)$, т. е. $g(z)\in S_1$ и $h(z)\in S_1$. Елементът $f_0(z)$ обаче е неразложим в S_1 и следователно

$$g(z)=\alpha f_0(z), \quad h(z)=\beta f_0(z),$$

където α и β са неотрицателни константи. По такъв начин е установена неразложимостта на $f_0(z)$ в S.

Ние обаче вече установихме, че неразложимите елементи на S трябва да се търсят измежду функциите (8). Това ни дава право да твърдим, че при някое τ от интервала $-1\leqq t\leqq 1$ имаме

$$f_0(z)=\frac{Cz}{1-2\tau z+z^2}, \quad C>0,$$

и следователно

$$F(f_0)=\frac{Ca}{1-2\tau a+a^2}-\frac{\lambda Cb}{1-2\tau b+b^2}=C\varphi(\tau),$$

което заедно с

$$F(f_0)=Lf_0'(0)=LC$$

ни дава

$$\varphi(\tau)=L.$$

От друга страна, функциите (8) принадлежат на S и следователно

$$F\left(\frac{z}{1-2tz+z^2}\right)\leqq L,$$

т. е.

$$\varphi(t)\leqq L.$$

По такъв начин ние установихме, че функцията $\varphi(t)$ приема при $t=\tau$ максимална стойност. От друга страна, ние знаем, че тя приема максимална стойност само в точката t_0 и следователно $\tau=t_0$, т. е.

$$\frac{z}{1-2t_0z+z^2}=f_0(z).$$

Ние обаче видяхме, че функцията $f_0(z)$ е неразложима в S. С това е установена и неразложимостта на

$$\frac{z}{1-2t_0z+z^2}$$

при всеки избор на t_0 в затворения интервал $[-1, 1]$.

Постъпила на 30. XII. 1961 г

О НЕРАЗЛОЖИМЫХ ЭЛЕМЕНТАХ НЕКОТОРЫХ КОНУСОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Я. Тагамлицкий

(Резюме)

В конусе регулярных и однолистных функций в некоторой односвязной области G, которые имеют положительную действительную часть, неразложимы те и только те функции, которые отображают G конформно на полуплоскость комплексных чисел с положительной действительной частью. В качестве приложения доказывается теорема Римана о конформных отображениях.

В конусе регулярных однолистных, нормированных и действительных в единичном круге функций неразложимыми являются функции вида

$$f(z)=\frac{cz}{1-2tz+z^2}, \quad c>0, \quad -1\leqq t\leqq 1$$

и только эти функции.

DIE IRREDUZIBLEN ELEMENTE GEWISSER KEGEL VON ANALYTISCHEN FUNKTIONEN

J. Tagamlitzki

(Zusammenfassung)

Im Kegel der in einem einfachzusammenhängenden Gebiet G schlichten analytischen Funktionen, die einen positiven Realteil besitzen, sind genau dijenigen Funktionen irreduzibel, die G auf die Halbebene $\mathrm{Re}(z) > 0$ konform abbilden. Daraus ergibt sich der Satz von Riemann über die konforme Abbildung.

Im Kegel der schlichten normierten reellen analytischen Funktionen sind genau die Funktionen

$$f(z) = \frac{cz}{1-2tz+z^2}, \quad c > 0, \quad -1 \leq t \leq 1$$

irreduzibel.