МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ
Доклади на Трета пролетна конференция на БМД, Бургас, 2 — 4 април 1974 г
София, БАН, 1976, с. 87 — 93

НЯКОИ ВЪПРОСИ ЗА ПРЕПОДАВАНЕТО НА МАТЕМАТИКАТА В СРЕДНОТО УЧИЛИЩЕ

Ярослав Тагамлицки

За по-голямата част от учениците математиката в средното училище е трудна. Този въпрос е много стар, но и досега не е решен. Голяма част от учениците смятат лошо, с много грешки, повечето от които говорят за неразбиране и за недостатъчно математическо развитие. От друга страна, в началното училище до 6-и клас включително подобен проблем или въобще не възниква, или възниква рядко. Там почти всички ученици се научават задоволително да смятат. Това е така, въпреки че някои от въпросите, които се изучават успешно от малките ученици, са по-сложни от някои въпроси, които остават неусвоени в по-горните класове. Така правилото за деление на две десетични дроби е по-сложно от правилото за повдигане на двучлен в трета степен, обаче първото правило се усвоява от по-голямата част от учениците, а второто — не. Също тъй трябва да се запитаме защо много ученици от средното училище смесват някои неща, като например привеждането под общ знаменател с освобождаването от знаменателя, степенуването с умножението, правилото за пренасяне на множители в уравненията с правилото за пренасяне на събираеми и пр. Такова смесване на различни неща в долните класове не се наблюдава.

В горните класове за разлика от долните се извършват доказателства и проблемите, свързани с това, са от друго естество. За тях ще говорим по-късно. Тук искаме да изясним защо много ученици смятат лошо. Погрешно е да обясняваме това със сложността на материята. В подкрепа на нашата мисъл ще разгледаме някои примери.

В девети клас за изучаване на квадратните уравнения — непълни и пълни, се предвиждат 5 часа. Обикновено, след като са взети часовете, определени за тази материя, не всички ученици са я усвоили. Обаче с течение на времето пълните квадратни уравнения все пак се усвояват от по-голямата част от учениците, защото тези уравнения се срещат често. Напротив, броят на учениците, които не знаят да решават квадратни уравнения без свободен член, се увеличава с течение на времето, защото тези уравнения се срещат по-рядко. Тези уравнения обаче са по-прости от пълните. Ето друг пример. За голяма част от учениците часовете, определени за решаване на линейни уравнения с едно неизвестно, не са достатъчни. Това става причина за много трудности в по-горните класове по математика и физика. Все пак с течение на времето броят на учениците, които правят груби грешки при решаването на линейните уравнения, намалява, защото линейните уравнения се срещат често. От друга страна, линейните неравенства с едно неизвестно, които не са по-сложни от линейните уравнения, остават неусвоени от по-голямата част от учениците, защото се срещат рядко в средното училище.

И така усвоява се онази материя, която е била достатъчно упражнявана. Фактите, които наблюдаваме, трябва да ни накарат да признаем, че хорариумът, който е определен за математиката в горните класове, не е достатъчен и никога не е бил достатъчен. Във случаите, когато се дават повече часове по математика, те се запълват с нова материя било във форма на теория, било във форма на сложни задачи, които при това често пъти са лишени от принципиално значение. По такъв начин неправилното съотношение между материята и хорариума не се изменя. Допълнителните часове не трябва да се запълват с нова материя. Те трябва да се използуват за усвояване на взетия материал. Това е пътят, по който ще се създадат нужните сръчности и навици. Ако това не се осъществи в средното училище, то още по-трудно може да стане във висшето училище, където обемът на материята е голям и на по-високо ниво. Опасно заблуждение е да смятаме, че учениците трябва да добият необходимата сръчност чрез самостоятелна работа в къщи. Разбира се, в много случаи такава работа въобще не се извършва. Обаче в много случаи тя се извършва, но не е рационална, защото ученикът не знае и не може да знае от какво има нужда.

Училището трябва да създаде онази основа, при която работата в къщи ще бъде резултатна и поради това желана. Това не може да се постигне, ако часовете не са достатъчно.

При нас увеличен хорариум по математика има в математическите гимназии. Но тъкмо учениците с наклонност към математиката най-малко се нуждаят от допълнителни занимания. Нуждаят се учениците, които срещат затруднения при усвояването на математиката. За да направим ефикасно обучението по математика в средното училище, трябва или да увеличим хорариума за всичките ученици, без да увеличаваме материала, или да намалим материала. Няма никакви причини резултатите в по-горните класове да бъдат по-лоши от резултатите с малките ученици. Така ще създадем истински интерес у младежта към математиката, защото интерес се създава, когато работата е резултатна, а не когато запознаем учениците с по-голям брой факти. Напротив, претоварването на учениците не води до друго освен до пресищане. В това отношение имаме опит от нашите математически гимназии и по-специално от Националната математическа гимназия. Резултатите не са благоприятни. В тази връзка искам да цитирам следното изказване на френския математик Гюстав Шоке, което се отнася до аналогични опити във Франция (вж. *Физико-математическо списание*. 15, 1972, с. 232): „Някои смятаха, че би било по-добре учениците със специални наклонности да се подберат и обучават в специални класове, за да се подготвят по-интензивно за университета. Както изглежда, по различни причини тези класове не доведоха до очакваните резултати."

В нашето средно училище по много предмети има подчертан стремеж да се дават на учениците по възможност повече факти. По математика това се отнася за математическите гимназии. Така например по физика почти всеки час се взима нов урок. При това някои смятат, че за да се въведе производната във физиката, е достатъчно да се кажат няколко неясни думи. В резултат на тези увлечения учениците са претоварени, а до осмисляне на материала не се достига. Нещо повече, вместо да получат по-големи знания, учениците усвояват по-малко от това, което биха могли да усвоят, и свикват да повтарят думи, чийто смисъл не разбират.

В по-ограничен размер е въведен нов материал и по математика. Такъв е случаят с въвеждането на векторите в средното училище. Тази материя обаче мъчно се усвоява от учениците. Трябва да се запитаме дали броят на часовете, определени за усвояването ѝ, е достатъчен. Нещо повече, след като е взета материята, следва дълъг период, преди тя да се приложи, и едва при извода на събирателните теореми в тригонометрията, когато всичко е забравено, се мъчим да я използуваме. При това както у нас, така и в някои други страни векторите се въвеждат като свободни вектори. Обаче това понятие не само е лишено от необходимата нагледност, но то не е пригодно за по-голямата част от приложенията във физиката и геометрията. Векторите, които се използуват във физиката, не са свободни. Не по-малки са затрудненията за геометрията, защото такива обекти като точки, криви и повърхнини не се изразяват чрез свободни вектори. Свободните вектори се въвеждат, защото те образуват линейно пространство. Обаче по-просто, по-нагледно и с по-голяма полза ще получим линейно пространство, ако разглеждаме вектори, приложени към една точка. Точно такива вектори се използуват във физиката и геометрията. Явно е, че идеята за въвеждане на векторите в средното училище като свободни вектори трябва да се изостави.

Учебният материал по математика може с полза да се съкрати на някои места. Така например не е необходимо да се изучава правилото за извличане на квадратен корен, излишни са логаритмичните уравнения, не е необходимо да се изучават редици, граници и непрекъснатост. Вместо да въвеждаме лицата на равнинните фигури по традиционните начини, което никога не става задоволително, можем да въведем аксиома, която гласи, че на всяко ограничено множество от точки в равнината може да се съпостави неотрицателно число така, че да бъде изпълнено условието за адитивност, и числото, което съпоставяме на правоъгълник със страни a и b, да бъде ab. Това може да се докаже с помощта на аксиомата за изборите и следователно няма пречки да се използува като аксиома. По такъв начин се освобождаваме от необходимостта да се занимаваме с измерими множества, защото сега всяко множество има лице. Разбира се, не за всяко множество лицето може да се пресметне, защото мярката, чието съществуване постулирахме, не е определена еднозначно. Обаче има случаи, когато лицето може да се пресметне. Точно такива случаи се разглеждат в училището, при които мярката е определена еднозначно. Аксиомата, която препоръчваме, ни освобождава от необходимостта да дефинираме отделно лицето на кръга. По такъв начин остава само задачата за неговото пресмятане, която може да се реши задоволително. Ако позволява хорариумът, добре е от аксиомата да се задава само лицето на квадрат със страна единица, а лицето на правоъгълник да се пресметне. Ако часовете не са достатъчно, това трябва да се пожертвува. Разбира се, съвсем аналогично се въвежда понятието обем.

Макар че препоръчваме да се изостави изучаването на сходимост и непрекъснатост, смятаме, че е полезно да се изучават производни, и се надяваме, че това може успешно да стане в IX клас. По такъв начин ще можем да прилагаме производните във физиката и математиката още в средното училище. Такава възможност добиваме благодарение на ефодиката.

Думата ефодика се употребява обикновено като съкратено наименование на съчинението на Архимед Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος, в което той излага един нов за онова време метод. С помощта на този метод Архимед е направил множество открития и по-специално е намерил обема на кълбото. Обаче разсъжденията, с които той си е служил, не представляват доказателства. Поради това Архимед е давал на откритите с помощта на неговия метод теореми и редовни доказателства, които почиват върху аксиомата на Евдокс. Най-многобройни и най-дълбоки приложения на тази аксиома в древността се дължат на Архимед, поради което много математици сега я наричат аксиома на Архимед.

Тук ние влагаме в думата „ефодика" друг смисъл. Както ще видим, върху аксиомата на Архимед може да се изгради напълно строго една съществена част от анализа. Това ни дава основание да гледаме на Архимед като на родоначалник на изследвания от този род. Под ефодика ние ще разбираме частта от анализа, която ще опишем в следващите редове.

В ефодиката се изучават производни и интеграли. Тази част от анализа обаче се отличава от диференциалното и интегралното смятане, защото не използува аксиомата за непрекъснатост на съвкупността от числата, с които работи, а се ограничава с аксиомата на Архимед (според нея съвкупността от целите положителни числа не е ограничена отгоре). По такъв начин изучаването на тази дисциплина може дори да предхожда въвеждането на ирационалните числа, защото аксиомата на Архимед е валидна и за съвкупността на рационалните числа.

Ефодиката се отличава от диференциалното и интегралното смятане и по това, че не използува нито понятието граница, нито понятието непрекъснатост. В средното училище тези понятия не се усвояват задоволително от учениците главно поради това, че не могат да бъдат развити достатъчно и не получават подходящи приложения. Ефодиката ни освобождава от необходимостта да се занимаваме с тези понятия в средното училище. Обаче понятието производна се дефинира точно. Ефодиката е чувствително по-елементарна от диференциалното и интегралното смятане и е по-малка по обем, обаче възможностите за приложения, които тя ни открива както в самата математика, така и във физиката, са много големи. За по-дълбоки приложения, разбира се, е необходимо понятието реално число, което може да бъде въведено допълнително.

Ефодиката се отличава съществено от пропедевтиката на диференциалното и интегралното смятане, т. е. от традиционните форми на преподаването на тези въпроси в средното училище. Разликата се заключава в това, че ефодиката е една напълно строга математична наука, което не ѝ пречи да бъде достъпна за средношколците. При обичайните изложения на диференциалното и интегралното смятане в средното училище главните затруднения се явяват при доказването на критерия за монотонност. В ефодиката този въпрос се разглежда напълно строго и същевременно елементарно. С това, разбира се, се установява строго и основната теорема на интегралното смятане, защото ако производната на една функция е нула в един интервал, то функцията е и монотонно растяща, и монотонно намаляваща и следователно е константа.

Вероятно учениците биха могли да усвояват успешно ефодиката, като нейното преподаване се започне от IX клас. Разбира се, за да може да се реши този въпрос окончателно, е необходимо да се направят съответни опити. Такъв опит беше направен тази година в летния лагер в село Говедарци, където се подбираха ученици и ученички за Националната математическа гимназия. Кандидатите бяха завършили VIII клас в различни училища на страната. Опитът показа, че учениците на тази възраст могат да усвояват успешно ефодиката при условие, че тя им се дава във форма, която е рационално разработена в методическо отношение. Въпреки този положителен резултат ние не можем да направим окончателни изводи, защото опитът беше направен с деца, които вече бяха подбирани и които в по-голямата си част се отличаваха с подчертано трудолюбие.

През тази учебна година (1973/1974) ние провеждаме още един опит, този път при нормални училищни условия — в два девети класа на Осма гимназия. Това не са математически класове. Учениците не са подбирани. Аз водя занятията в 9в клас, а София Димитрова — преподавателка в същото училище — в 9а клас. Предвидени са по два учебни часа седмично. Около 40% от учениците усвояват успешно ефодиката. За 60% от учениците се наложи да се взима още един час седмично, с което те успешно догонват другарите си. Макар че опитът още не е завършен, вече се вижда, че ефодиката е достъпна за учениците от IX клас при условие, че се изучава три часа седмично и материалът се дава във форма, която е рационално разработена в методическо отношение. За учениците от 9а клас не сме въвели трети учебен час. Там помощ на изоставащите ученици се дава във форма на обичайни консултации. Още е рано да преценим резултатите от тази форма на допълнителни занимания. Аз имам впечатлението обаче, че тя не би могла да бъде равностойна на един редовен трети час както поради отношението на учениците, така и поради това, че така часовете ще бъдат по-малко. Разбира се, при нужда се правят консултации и тогава, когато занятията се водят 3 часа.

За да дадем идея за съдържанието на ефодиката, ще разгледаме няколко въпроса по същество.

В ефодиката ние не се стремим към най-голяма общност. Изучаваме функции в някой интервал, които имат производна, удовлетворяваща условието на Липшиц. Тази степен на общност обаче е много голяма. Тя ни дава много повече от това, което е необходимо за приложенията в средношколската математика и физика. Същевременно тази класа от функции, както ще видим, поради простотата си е пригодна за преподаване в средното училище.

Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в интервала $m \leq x \leq n$. Ще казваме, че тази функция е нормална в този интервал, ако при всеки избор на числото a от интервала $[m, n]$ функцията $f(a+h)$ на променливата h при $m \leq a+h \leq n$ може да се представи във вида $f(a+h)=p+qh+R$, където p и q не зависят от h, и $|R| \leqq Ah^2$, където A е подходящо число, което не зависи нито от h, нито от a.

Лесно се доказва, че в това развитие p и q са определени еднозначно. По дефиниция полагаме $f'(a)=q$.

Разбира се, рационалните функции са нормални във всеки компактен интервал, в който са дефинирани. Това обстоятелство ни дава възможност да разглеждаме много примери. След дефиницията на понятието нормална функция и на понятието производна се доказват теоремите за диференциране на сума, разлика, произведение, частно и функция от функция и се намира производната на степен.

Основната теорема на ефодиката се формулира по следния начин:

Ако функцията $f(x)$ е нормална в интервала $m \leqq x \leqq n$ и $f'(x) \geqq 0$, то $f(x)$ е монотонно растяща в този интервал.

Доказателството на тази теорема се основава върху аксиомата на Архимед, според която съвкупността от целите положителни числа не е ограничена отгоре.

Доказателство. Нека x_1 и x_2 са две числа, които удовлетворяват неравенствата $x_1 < x_2$, $m \leqq x_1 \leqq n$, $m \leqq x_2 \leqq n$. От условието за нормалност имаме

$$(1) \qquad f(x_2)=f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)+R,$$

където $|R| \leqq A(x_2-x_1)^2$ при подходящ избор на константата A. От (1) получаваме

$$(2) \qquad f(x_2)-f(x_1) \geqq -A(x_2-x_1)^2,$$

защото $f'(x_1) \geqq 0$, $x_2-x_1>0$, $R \geqq -A(x_2-x_1)^2$.

Делим интервала $[x_1, x_2]$ на две равни части. Прилагаме неравенството (2) към двойката точки $[(x_1+x_2)/2, x_2[$ и към двойката точки $[x_1, (x_1+x_2)/2]$ и намираме

$$f(x_2)-f[(x_1+x_2)/2] \geqq -A(x_2-x_1)^2/4,$$

$$f[(x_1+x_2)/2]-f(x_1) \geqq -A(x_2-x_1)^2/4.$$

Като съберем тези неравенства, получаваме

$$f(x_2)-f(x_1) \geqq -A(x_2-x_1)^2/2.$$

Ако приложим n пъти този резултат, ще получим при всички цели положителни стойности на n

$$f(x_2)-f(x_1) \geqq -A(x_2-x_1)^2/2^n.$$

Искаме да докажем, че $f(x_2)-f(x_1) \geqq 0$. Да допуснем противното, т. е. че $f(x_2)-f(x_1)<0$. Тогава $2^n \leqq A(x_2-x_1)^2/(f(x_1)-f(x_2))$.

От друга страна, $2^n > n$ и следователно

$$n \leqq A(x_2-x_1)^2/(f(x_1)-f(x_2)).$$

Следователно получихме една горна граница на съвкупността от целите положителни числа, което противоречи на аксиомата на Архимед. С това доказателството е завършено.

В заключение ще направим бележки относно доказателствата в средношколския курс по математика. Тук трудностите, които срещат учениците, са далеч по-големи от онези, които трябва да се преодолеят при усвояването на техническите сръчности. От друга страна, доказателствата имат първостепенно значение в процеса на обучението. За да може едно доказателство да се възприеме от учениците, те трябва да бъдат подготвени за това. Доказателството на всяка по-сложна теорема трябва да се предхожда от предварителна целенасочена работа. Понякога за това са нужни няколко учебни часа. Доказателството трябва да бъде съставено от стъпки, които са познати на учениците.

Погрешна практика е да се дават по-сложните теореми без доказателства, като евентуално се казва, че тези теореми могат да се докажат или пък че се доказват във висшата математика. Реакцията у по-събудените ученици в такива случаи не е благоприятна. Те не искат да бъдат третирани като деца. В действителност няма теореми в средношколската математика, които да не можем да докажем на учениците, стига да въведем подходящи аксиоми, които са нагледни и приемливи за интуицията на ученика. Такава е например аксиомата на Архимед и аксиомата за съществуване на лица и обеми, от която впрочем следва аксиомата на Архимед и дори принципът за непрекъснатост.

Геометрията ни дава широки възможности за извършване на доказателства в средното училище. Не по-малки възможности ни дава и алгебрата, но те не се използуват достатъчно. Ние се надяваме, че ефодиката ще даде възможност да се обогати още повече средношколската математика с достъпни и поучителни доказателства.

Единен център за наука и подготовка на кадри
по математика и механика — София