

ЛЕКЦИЯ И ТВОРЧЕСТВО

Ярослав Тагамлицки

Миналата година на тази конференция ме помолиха да споделя преподавателския си опит. Сега ще се опитам да го направя. Въпросът обаче е твърде многостанен, за да мога да го разгледам в един единствен доклад, поради което ще трябва да се огранича. Ще говоря само за това, какви средства използвам, за да направя математическите дефиниции разбираеми. Това е една задача, за която няма шаблон. Тя често пъти изисква да мобилизираме всичките си творчески сили. По-долу ще посоча съответни примери.

В миналото често пъти дори в университетите математическите въпроси са били разглеждани без да се формулират точно необходимите дефиниции. Такива разсъждения апелират към нашата интуиция, а не към логиката. Те нямат силата на доказателства. За да може едно понятие да се включи в математическо разсъждение трябва да имаме поне едно съждение, което съдържа това понятие. По такъв начин всяко доказуемо съждение, което съдържа дадено понятие, трябва да има предшественик във вид на съждение, което също съдържа това понятие. От друга страна ние се занимаваме с краен брой съждения. Следователно винаги ще имаме поне едно съждение, което съдържа интересувашето ни понятие и което не се доказва. Такова съждение, или такива съждения, които се формулират изрично, съдържат даденото понятие, но не се доказват, съставят дефиницията на това понятие. По такъв начин няма принципна разлика между дефиниция и аксиома. Без дефиниции математическите доказателства не са възможни. Поради това при интуитивните разглеждания не се касае за доказателства. При такива разглеждания не се достига и до разбиране.

За разлика от миналото, днес някои математици изпадат в друга крайност. Сега математическите съчинения изобилствуват с дефиниции, много от които не са необходими. Редовно срещаме

книги, чийто предметен указател съдържа няколко стотин термина. Така в една книга по алгебра, която е много известна, намираме следните термини: идеал, идеал неразложим, идеал неприводим, идеал еднократен, идеал отбелязан, идеал примарен, идеал примарен висок, идеал примарен нисък, идеал силно примарен, идеал слабо примарен и пр. общо 35 вида идеали, всички надлежно дефинирани. Впрочем, предметният указател на тази книга съдържа около 1200 термина. Досега с аналогична задача сме се срещали, когато сме искали да изучим някой чужд език.

Въпросът, с който се сблъскахме, е сериозен. Работата е там, че много млади математици се мъчат да усвоят огромен материал, без да могат да отделят съществено от баласта. Те мислят, че това е модерната и важната математика и ако срещат затруднения мислят, че вината е в тях. Вината, обаче не е само в тях. Често пъти дефинициите се дават без какъвто и да било пример. Поради това читателят е принуден да се мъчи да усвои една или друга дефиниция без да знае, дали тя въобще не е празна. Някои автори дават един или няколко примера, като посочват математически обект, който удовлетворява условията на дефиницията, и с това се задоволяват. Те изглежда мислят, че с това се решава въпроса дали дефиницията е празна или не. Въпросът обаче съвсем не е решен. Една дефиниция се дава за да се прилага. Ако една дефиниция няма да се прилага, няма нужда да се дава. Такава дефиниция е празна, макар и да съществуват обекти, които удовлетворяват нейните условия. Когато искаме да въведем ново понятие, не бива да започваме от дефиницията, нито от пример, който трябва да установи, че условията на дефиницията са изпълними. Ние трябва да изхождаме от задача. Това ще ни осигури, че дефиницията поне не е празна. Такова едно изискване обаче е много малко, за да оправдае въвеждането на една дефиниция. Ние искаме да изучаваме само съществени дефиниции. Поради това трябва да изхождаме от задача, която е интересна.

Усвояването на една дефиниция е не само логически процес, но и психологически. Той има силно изразена емоционална страна. Поради това творческият момент в преподаването е от решаващо значение.

Историята на математиката ни дава поучителни примери на

връзка между творческата и преподавателската дейност на математиците. Така много от теоремите, които носят името на Коши са произлезли от преподавателската му дейност в Екол Политехник и се съдържат в неговите учебници Курк по анализ и Инфинитезимально смятане. Такива са например теоремите за съществуване на интегрални на диференциалните уравнения. Обаче теоремата на Коши от теорията на аналитичните функции прави изключение. Тя е публикувана през 1831 г., когато Коши е бил в изгнание. Трудно е да се прокара граница между творческата и преподавателската дейност на Коши. Като пише строги курсове за своите студенти, той създава основите на съвременния анализ.

Още по-трудно е да се разграничи творческата и преподавателска дейност у Якоби. Влиянието на създадената от него Кьонигсбергска школа е изключително и дълготрайно. Когато обаче след 17 годишна блестяща научна и преподавателска дейност той е поканен в Берлин, където няма преподавателски задължения, той загубва и творческите си сили.

Лекциите на Дирикле са били от най-голямо значение за такива математици, като Риман, Дедекинд, Кронекер и Айзенщайн. Лекциите му върху Теорията на числата са издадени от Дедекинд и не са изгубили своето значение и днес.

Вайершрас е публикувал малко. По-голямата част от теоремите, които носят неговото име са познати от неговите лекции и са достигнали до нас чрез записките на неговите ученици.

У Риман също преподавателската и творческата дейност са били неотделими. Последните резултати на Риман, които той е чел през 1861-62г. са достигнали до нас благодарение на записките на неговите ученици Рох, Прим и Минигероде.

Такива примери могат да се посочат много. Някои, обаче, мислят, че преподавателската дейност днес не може да се свърже с изследователската, защото обучението се извършва по установена програма. Програмата действително има, но тя не е пречка защото включва важна материя, а освен това има и свободни лекции. Пречки няма, защото изпълнението на програмата може да се извършва с едно или друго задълбочаване. Творчеството може да се прояви и при съвсем елементарни въпроси. Например искаме да развием функционалната детерминанта

$$\frac{D(P, Q, R)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \begin{vmatrix} P'_{x_1} & P'_{x_2} & P'_{x_3} \\ Q'_{x_1} & Q'_{x_2} & Q'_{x_3} \\ R'_{x_1} & R'_{x_2} & R'_{x_3} \end{vmatrix}$$

по първия ред. Можем, разбира се, да напишем така:

$$\frac{D(P, Q, R)}{D(x_1, x_2, x_3)} = P'_{x_1} \begin{vmatrix} Q'_{x_2} & Q'_{x_3} \\ R'_{x_2} & R'_{x_3} \end{vmatrix} - P'_{x_2} \begin{vmatrix} Q'_{x_1} & Q'_{x_3} \\ R'_{x_1} & R'_{x_3} \end{vmatrix} + P'_{x_3} \begin{vmatrix} Q'_{x_1} & Q'_{x_2} \\ R'_{x_1} & R'_{x_2} \end{vmatrix},$$

но бихме могли да напишем още и тъй:

$$(1) \quad \frac{D(P, Q, R)}{D(x_1, x_2, x_3)} = \sum_{\alpha=1}^3 P'_{x_\alpha} \frac{D(x_\alpha, Q, R)}{D(x_1, x_2, x_3)}.$$

Във верността на това развитие се убеждаваме, като вземем под внимание, че

$$\frac{D(x_\alpha, Q, R)}{D(x_1, x_2, x_3)}$$

не е нищо друго освен адънгираното количество на P'_{x_α} .

Дали тук обаче има някакво творчество? Дали при такъв дребен въпрос може да става дума за творчество? И дали това въобще е ново? Аз не зная, какъв е отговорът на последния въпрос, но не мисля, че този въпрос има значение. Ако бихме могли да установим, че тази формула е нова което, може би, е трудно да се направи, с това не бихме изяснили никой от нейните математически особености. По-добре е да обърнем внимание върху това, че тя ни освобождава от необходимостта да се занимаваме със знаците на адънгираните количества и ни позволява да напишем явно адънгираните количества и в общия случай. Така за детерминанта от n -ти ред ще имаме

$$(2) \quad \frac{D(P_1, P_2, \dots, P_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial P_1}{\partial x_\alpha} \frac{D(x_\alpha, P_2, \dots, P_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

Можем да направим още една стъпка, като развием

$$\frac{D(x_\alpha, P_2, \dots, P_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

по P_2 т.е. по втория ред. Така получаваме

$$(3) \quad \frac{D(P_1, P_2, \dots, P_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial P_1}{\partial x_\alpha} \frac{\partial P_2}{\partial x_\beta} \frac{D(x_\alpha, x_\beta, P_3, \dots, P_n)}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}$$

Сега можем да развием още и по P_3 и т.н.

Това, че се занимаваме с функционални детерминанти, не е ограничение, защото всяка детерминанта

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn} \end{vmatrix}$$

чиито членове са числа, може да се разглежда като функционална детерминанта

$$\frac{D(P_1, P_2, \dots, P_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

на линейните функции

$$P_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n$$

$$P_n = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n$$

Сега можем да получим правилото на Лаплас така. Да разменим в (3) сумационните индекси α и β . Тогава получаваме

$$(4) \quad \frac{D(P_1, P_2, \dots, P_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial P_1}{\partial x_\beta} \frac{\partial P_2}{\partial x_\alpha} \frac{D(x_\beta, x_\alpha, P_3, \dots, P_n)}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}$$

Като съберем (3) и (4) намираме

$$\frac{D(P_1, P_2, \dots, P_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{1}{2!} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \frac{D(P_1, P_2)}{D(x_\alpha, x_\beta)} \frac{D(x_\alpha, x_\beta, P_3, \dots, P_n)}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}$$

Аналогично намираме

$$\frac{D(P_1, P_2, \dots, P_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{1}{3!} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \sum_{\gamma=1}^n \frac{D(P_1, P_2, P_3)}{D(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma)} \frac{D(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma, P_4, \dots, P_n)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n)}$$

и пр.

Все пак трябва да се запитае, дали при такъв малък въпрос може да се говори за творчество. Мумата "творчество" много задължава. Въпросът е, разбира се, спорен. Аз не се поколебах

да посоча моя пример, защото творчеството може да бъде голямо, обаче може да бъде и малко. Но какво значи творчество? Якоби е създавал не само теореми, но е създал и Кьонигсбергската школа, която ни е дала Хесе, Карл Нойман, Клеби, Хурвиц, Хилберт и Минковски. По такъв начин влиянието на Якоби е било живо половин век след неговата смърт. И това е творчество. Творчеството е нещо сложно и многостранно. Творчеството буди чувства. Да разгледаме един пример.

В алгебричната топология играе основна роля тъждеството

$$\sum_{\lambda=0}^n \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{D(x_\lambda, \rho_1, \dots, \rho_n)}{D(x_0, x_1, \dots, x_n)} = 0.$$

Като използваме нашата формула (2) добиваме възможност да го докажем индуктивно така

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=0}^n \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{D(x_\lambda, \rho_1, \dots, \rho_n)}{D(x_0, x_1, \dots, x_n)} &= \sum_{\lambda=0}^n \sum_{\mu=0}^n \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left[\frac{\partial \rho_1}{\partial x_\mu} \frac{D(x_\lambda, x_\mu, \rho_2, \dots, \rho_n)}{D(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)} \right] = \\ &= \sum_{\lambda=0}^n \sum_{\mu=0}^n \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} \frac{D(x_\lambda, x_\mu, \rho_2, \dots, \rho_n)}{D(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)} + \sum_{\mu=0}^n \frac{\partial \rho_1}{\partial x_\mu} \sum_{\lambda=0}^n \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{D(x_\lambda, x_\mu, \rho_2, \dots, \rho_n)}{D(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0 \end{aligned}$$

Първата сума е нула поради антисиметрията на функционалната детерминанта, а за второто събираемо имаме

$$\sum_{\lambda=0}^n \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{D(x_\lambda, x_\mu, \rho_2, \dots, \rho_n)}{D(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)} = \pm \sum_{\lambda \neq \mu} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \frac{D(x_\lambda, \rho_2, \dots, \rho_n)}{D(x_0, x_{\mu_1}, x_{\mu_2}, \dots, x_n)} = 0$$

съгласно индуктивното предположение.

Този пример, вероятно, е събудил чувства у читателя. Най-малкото читателят е бил изненадан, защото ние приложихме същата формула, за която вече говорихме, но този път доказахме една теорема, която принадлежи към област, за която днес много се говори.

Читателят вероятно се пита, защо казах, че последният пример се отнася към алгебричната топология. Сега най-често теоремите от тази част на математиката се формулират на друг език. Алгебричната топология обаче може да се излага и на

обичаен математичен език. Аз смятам, че е за предпочитане да се придържаме към обичайния език. Ние не се интересуваме от формата. Ние се интересуваме от въпросите по същество.

Понеже става дума за една съвременна област от математиката, бих искал тук малко повече да се спра. Сега често се употребяват термини, които се отличават от обичайните. Така вместо диференциал някои хора казват кограница. Вместо да казват, че диференциалът на една форма е нула, казват, че формата е коцикъл и пр. Използват се много дефиниции, някои от които са твърде абстрактни. Ние обаче се интересуваме от това, как да въвеждаме дефинициите. Бих искал да покажа конкретен пример, как могат да се прилагат принципите, които формулирах в началото. Съгласно тези принципи ще се ръководим от задачи.

Да разгледаме пак нашето развитие (2). Дясната му страна представлява сума от вида

$$A_1 = \sum_{\alpha=1}^n Q_{\alpha} \frac{D(x_{\alpha}, p_2, \dots, p_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

Очевидно, ако всичките коефициенти Q_{α} са равни на нула, то $A_1 = 0$ както и да избираме функциите p_2, \dots, p_n .

Обратното е също вярно, т.е. ако A_1 се анулира при произволен избор на функциите p_2, \dots, p_n то всичките коефициенти Q_{α} са равни на нула. И наистина, да изберем

$$p_2 = x_2, \dots, p_n = x_n.$$

Тогав $A_1 = Q_1$ и следователно $Q_1 = 0$, защото по условие имаме $A_1 = 0$. Ако поставим $p_2 = x_1, p_3 = x_3, \dots, p_n = x_n$, получаваме $A_1 = \pm Q_2$ и следователно $Q_2 = 0$ и пр.

По-интересен е въпросът със сумата (3) Това е една сума от вида

$$A_2 = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n Q_{\alpha\beta} \frac{D(x_{\alpha}, x_{\beta}, p_3, \dots, p_n)}{D(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)}.$$

Тази сума може да се анулира тождествено при всеки избор на функциите p_3, \dots, p_n и без да се анулират всичките коефициенти. Така ако

$$(5) \quad Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha},$$

то $A_2 = 0$ поради антисиметрията на функционалната детерминанта.

Сега вече можем да поставим задачата, от която ще тръгнем. Задачата гласи така: пита се, какви трябва да бъдат коефициентите $Q_{\alpha/\beta}$, за да имаме $A_2 = 0$ при всеки избор на функции P_3, \dots, P_n .

За да решим задачата избираме кой да е коефициент $Q_{\lambda\mu}$ и поставяме вместо P_3, \dots, P_n специалните функции x_1, \dots, x_n без x_λ и x_μ . Тогава получаваме

$$A_2 = Q_{\lambda\mu} \frac{D(x_\lambda, x_\mu, P_3, \dots, P_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} + Q_{\mu\lambda} \frac{D(x_\mu, x_\lambda, P_3, \dots, P_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$$

и следователно,

$$Q_{\lambda\mu} = Q_{\mu\lambda}$$

По такъв начин условието (5) което беше достатъчно за да имаме $A_2 = 0$ при всеки избор на P_3, \dots, P_n , е и необходимо.

Аналогично се убеждаваме, че сумата

$$A_k = \sum_{\alpha_1=1}^n \dots \sum_{\alpha_{k-1}=1}^n Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \frac{D(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k}, P_{k+1}, \dots, P_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$$

се анулира при всеки избор на функциите P_{k+1}, \dots, P_n тогава и само тогава, когато

$$\sum (-1)^{[i_1, \dots, i_k]} Q_{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}} = 0,$$

където сумирането се извършва върху всичките пермутации i_1, \dots, i_k на числата $1, \dots, k$, а $[i_1, \dots, i_k]$ означава броя на инверсиите на пермутацията i_1, \dots, i_k .

За да изразим накратко, че функциите $Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}(x_1, \dots, x_n)$ зависят от k индекса, ще казваме, че тези функции образуват форма от k -ти ред, когато $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ се менят независимо едно от друго от 1 до n .

Ще казваме, че формата

$$\{ Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \}$$

е конгруентна с нулата и ще пишем

$$\{ Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \} \approx 0$$

ако е изпълнено условието

$$\sum_{\alpha_1=1}^n \dots \sum_{\alpha_k=1}^n Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} \frac{D(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k}, p_{k+1}, \dots, p_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = 0$$

при всеки избор на функциите p_{k+1}, \dots, p_n

Ще пишем също тъй

$$\{Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}\} \approx \{P_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}\},$$

ако

$$\{Q_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} - P_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}\} \approx 0.$$

От дефиницията се вижда непосредствено, че ако в една форма направим транспозиция на два индекса, тя си сменя знака в смисъл, че сумата на така получените две форми е конгруентна с нулата. От това следва, че ако една форма не се изменя при транспозиция на два индекса, тя трябва да бъде конгруентна с нулата.

Сега можем да направим приложение на тази дефиниция.

Нека е дадена формата от $k+1$ ред с индекс $\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_k$

$$\{Q_{\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_k}\},$$

където функциите $Q_{\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_k}$ са дефинирани и имат непрекъснати първи частни производни в някое отворено множество W . Търсим функции $F_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}$ в W , които удовлетворяват условието

$$\left\{ \frac{\partial F_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}}{\partial \lambda} \right\} \approx \{Q_{\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_k}\}$$

Да разгледаме формата от $k+2$ ред

$$\left\{ \frac{\partial Q_{\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_k}}{\partial x_\mu} \right\} \approx \left\{ \frac{\partial^2 F_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}}{\partial \lambda \partial \mu} \right\}$$

Като вземем под внимание, че формата $\left\{ \frac{\partial F_{\alpha_1, \dots, \alpha_k}}{\partial \lambda \partial \mu} \right\}$ е симетрична относно индексите λ и μ заключаваме, че тя е конгруентна с нулата. По такъв начин виждаме, че за да има поставената задача решение, е необходимо да имаме

$$\left\{ \frac{\partial P_{\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_k}}{\partial x_\mu} \right\} \approx 0.$$

Това условие се нарича условие за интегруемост. Поанкаре доказа, че ако множеството W е звездообразно, това условие е и достатъчно.

Сега ще разгледаме последния пример. Знаем от диференциалното и интегралното смятане следното. Нека $P_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n)$ са функции, които са дефинирани и непрекъснати в някое отворено и свързано множество W в n -измеримото пространство. Ако

$$\int_{\Gamma} \sum_{\alpha=1}^n P_\alpha dx_\alpha = 0$$

по всеки затворен гладък път Γ , който се намира в W то съществува в W функция F , която удовлетворява условията

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = P_\alpha.$$

Бихме могли да поставим аналогичен въпрос за двойните интеграли по следния начин. Нека

$$\iint_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n P_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta = 0$$

по всяка гледка затворена повърхност Ω определена например така

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(u, v) \\ x_2 &= f_2(u, v) & 0 \leq u \leq 1 \\ \dots & \dots & 0 \leq v \leq 1 \\ x_n &= f_n(u, v) \end{aligned}$$

Двойният интеграл трябва да се разбира като

$$\int_0^1 \int_0^1 \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n P_{\alpha\beta}(f_1, \dots, f_n) \frac{D(f_\alpha, f_\beta)}{D(u, v)} du dv$$

В такъв случай се твърди, че съществува форма $\left\{ \frac{F}{\alpha} \right\}$ за която

$$\left\{ \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_\beta} \right\} \approx P_{\alpha\beta}.$$

Тази теорема се обобщава по очевиден начин и за интеграли от произволна кратност. Така формулираната теорема се нарича теорема на де Рам. Това е една теорема от алгебричната топология.

За нея Лоран Шварц казва следното / Анализ, т. II, 1972, руски превод стр. 251/:

"Теоремата на де Рам е един от най-дълбоките резултати на алгебричната топология. Тя е източник на всичките съвременни резултати на тази математическа теория. Нейното доказателство е много тънко и ние няма да го разглеждаме". Тази преценка е преувеличена. Касае се за теорема от анализа, която е напълно достъпна за всеки образован математик, стига да бъде изложена както трябва.