УВОДНИ БЕЛЕЖКИ КЪМ „ЕФОДИКАТА“ НА Я. ТАГАМЛИЦКИ

проф. Владимир Чакалов

Работата, която следва, съдържа обработените записки на създадения от Я. Тагамлицки в началото на седемдесетте години метод за преподаване на основите на диференциалното и интегралното смятане без въвеждане на понятието граничен преход. Идеята на Тагамлицки беше този метод да се използува за преподаване в средното училище. Ето как се стигна до написване на статията.

В края на седемдесетте години помолих Я. Тагамлицки да ме запознае със своя метод. От своя страна аз поех задължението да направя подробни записки на нашите беседи и да му ги представя за окончателна редакция. За съжаление работата по редактирането остана недовършена, така че цялата отговорност за появяването на статията в този си вид естествено се пада на мен. При написването ѝ съм се старал съдържанието да отразява по възможност най точно онова, което ми е съобщавал Я. Тагамлицки. Бързам да добавя обаче, че сигурно под негова окончателна редакция работата би придобила друг вид. Аз също бих се постарал да ѝ придам на места по-друга форма, ако не се боях да наруша автентичността на онова, което съм чул от моя учител в хода на нашите беседи. По тази причина се задоволих да поправя някои очевидни грешки и несъобразности в записките, забелязани от мен или от мои колеги, и да направя някои незначителни допълнения.

Както е написана, работата е предназначена за математици професионалисти, а не за ученици, тъй като, от една страна, изложението е сбито и липсват подходящи примери, а, от друга страна, е дадено сложното доказателство на теорема 8. Но не е

само това. Частта, която съдържа дефинициите и свойствата на елементарните функции и по-специално на логаритмичната функция, а особено на тригонометричните и обратните кръгови функции (макар че от математическо гледище е безупречна), не е подходяща в този вид за ученици от средното училище. Очевидно си струва труда да се обмисли вариант на изложение, при който тази част от материала да се опрости и свърже с изучаваното в училището.

Заглавието на статията не произхожда от проф. Я. Тагамлицки. Говорейки за онази част от своя метод, която не изисква употребата на принципа за непрекъснатост, Я. Тагамлицки я наричаше „Ефодика", т. е. метод. С това подчертаваше, че по дух тази част е близка до работата на Архимед, известна с това заглавие. (Доколкото ми е известно, тъкмо тази част от метода Тагамлицки преподаваше в един от деветите класове на Осма гимназия през учебната 1973—1974 г.) Но такова заглавие не подхожда на представената работа, защото тя съдържа редица теореми, изискващи прилагането на принципа за непрекъснатост. След консултации с част от останалите съставители на книгата беше дадено на работата настоящото заглавие, като в него умишлено беше оставена думата „метод".

Доц. Д. Скордев и проф. Т. Генчев взеха дейно участие в редактирането на ръкописа, с което допринесоха съществено за подобряване на изложението и отстраняване на някои грешки и пропуски. Използувам случая да им изкажа своята дълбока благодарност. Приятен дълг ми е да благодаря и на рецензентите проф. Д. Дойчинов и особено на доц. Н. Хаджииванов, чиито критични бележки също допринесоха за подобряването на текста.

ЕДИН МЕТОД ЗА ИЗГРАЖДАНЕ НА ЕЛЕМЕНТИ ОТ ДИФЕРЕНЦИАЛНОТО И ИНТЕГРАЛНОТО СМЯТАНЕ БЕЗ ГРАНИЧЕН ПРЕХОД*

проф. Ярослав Тагамлицки

НОРМАЛНИ ФУНКЦИИ И ПРОИЗВОДНИ

Всеки, който е запознат с основите на диференциалното и интегралното смятане, знае дефиницията на понятието производна на функция в дадена точка като граница на диференчно частно. По подробно казано, ако f е функция, дефинирана в някаква околност на точка c, производната ѝ $f'(c)$ се дефинира с равенството

$$f'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}.$$

Ако положим

$$\gamma=\frac{f(x)-f(0)}{x-c}-f'(c),$$

то $\lim\limits_{x\to c}\gamma=0$. Сега ще се опитаме да видоизменим дефиницията на производна, като ще избегнем употребата на понятието граничен преход. За тази цел се ограничаваме да разглеждаме онези диференцируеми функции, за които γ удовлетворява условието

$$(1)\qquad |\gamma|\leqq A|x-c|,$$

където A е подходяща константа. По-точно казано, разглеждаме всевъзможните функции, които са дефинирани и диференцируеми в краен затворен интервал $[a, b]$ и за които неравенството

* Вж. предшествуващите „Уводни бележки".

(1) е в сила за всяко фиксирано c и всяко x от $[a, b]$. За такива функции (ще ги наричаме нормални) е в сила представянето

$$(2) \qquad f(x)=\alpha+\beta(x-c)+R \quad (|R|=|(x-c)\gamma|\leqq A(x-c)^2)$$

(тук очевидно $\alpha=f(x)$ и $\beta=f'(c)$). Ясно е например, че функцията $f(x)=x$ е нормална във всеки краен затворен интервал.

Представянето (2) подсказва как да дефинираме нормална функция, без да използуваме понятието производна. Именно под нормална функция в $[a, b]$ ще разбираме функция, притежаваща представяне от вида (2) при подходящ избор на независещите от x константи α и β. Под производна на функцията в точка $c\in[a,b]$ ще разбираме константата β. Така, ограничавайки се с множеството на нормалните функции, добиваме възможност да дефинираме понятието производна без граничен преход.

По-нататък даваме подробната дефиниция на нормална функция:

Нека f е функция, дефинирана в крайния затворен интервал $[a, b]$. Ще казваме, че f е *нормална в този интервал*, ако при всеки избор на числото c от $[a, b]$ функцията f може да се представи във вида

$$(3) \qquad f(x)=\alpha+\beta(x-c)+R,$$

където x пробягва $[a, b]$, α и β са независими от x константи, а R, чиито стойности в общия случай очевидно зависят от x и c, удовлетворява неравенството $|R|\leqq A(x-c)^2$ при подходящ избор на числото A (който не зависи нито от x, нито от c).

От дефиницията на нормална функция веднага следва, че $\alpha=f(c)$. За да се убедим в това, достатъчно е да дадем в (3) на x стойност c. Също така веднага се вижда, че ако f е нормална в $[a, b]$, тя е нормална във всеки затворен подинтервал на $[a, b]$.

Ще покажем, че коефициентът β в (3) е определен еднозначно при дадено c от $[a, b]$. Предварително ще докажем следната

Лема. *Нека p, q и l са три числа и нека $p<q$. Ако за всяко x от отворения интервал (p, q) е изпълнено неравенството $x\geqq l$, то $p\geqq l$* (вж. черт. 1).

Доказателство. Да допуснем, че $p<l$. Очевидно $l<q$, защото l не надминава кое да е число от интервала (p, q) с десен край q. Да означим с r някое число от отворения интервал (p, l), т. е. $p<r<l$. Тогава $p<r<q$, откъдето следва, че $r\geqq l$, а това противоречи на неравенството $r<l$. Следователно направеното допускане е погрешно и значи $p\geqq l$. С това лемата е доказана.

Забележка. Аналогично се доказва, че при горните означения, ако за всяко x от интервала (p, q) имаме $x\leqq l$, то $q\leqq l$.

Като следствие от горната лема ще покажем, че коефициентът β в (3) е еднозначно определен. За тази цел означаваме с β_1 и β_2 две произволни стойности на β, за които е в сила (3), т. е. за които при всяко $x \in [a, b]$ и дадено $c \in [a, b]$ са в сила съотношенията

Черт. 1

$$(4) \qquad \begin{aligned} f(x) &= f(c)+\beta_1(x-c)+R_1 \quad (|R_1| \leqq A(x-c)^2), \\ f(x) &= f(c)+\beta_2(x-c)+R_2 \quad (|R_2| \leqq A(x-c)^2). \end{aligned}$$

От (4) получаваме чрез почленно изваждане

$$(\beta_1-\beta_2)(x-c)=R_2-R_1,$$

откъдето следва

$$|\beta_1-\beta_2|\,|x-c| \leqq |R_1|+|R_2| \leqq 2A(x-c)^2.$$

Ако $A=0$, то $|\beta_1-\beta_2|=0$ и значи $\beta_1=\beta_2$. Нека $A>0$. При $x \neq c$, ако съкратим на $2A|x-c|$, ще получим

$$\frac{|\beta_1-\beta_2|}{2A} \leqq |x-c|.$$

Ако $c<b$, избираме x в интервала (c, b). При всяко такова x ще имаме

$$x \geqq \frac{|\beta_1-\beta_2|}{2A}+c.$$

Съгласно горната лема неравенството запазва валидността си, ако заменим x с c. Така получаваме

$$c \geqq \frac{|\beta_1-\beta_2|}{2A}+c,$$

или

$$\frac{|\beta_1-\beta_2|}{2A} \leqq 0,$$

което означава, че $\beta_1=\beta_2$.

Ако $c=b$, избираме x в интервала $(a, c)=(a, b)$. При всяко такова x ще имаме

$$\frac{|\beta_1-\beta_2|}{2A}=c-x,$$

откъдето следва, че

$$x\leqq c-\frac{|\beta_1-\beta_2|}{2A}.$$

От забележката на с. 171 следва, че горното неравенство ще е в сила и за $x=c$, т. е. ще имаме

$$c\leqq c-\frac{|\beta_1-\beta_2|}{2A},$$

или отново

$$\frac{|\beta_1-\beta_2|}{2A}\leqq 0,$$

откъдето пак получаваме, че $\beta_1=\beta_2$.

И тъй константата β в равенство (3) е определена еднозначно от избора на c. Тази константа се нарича *производна на f в точка c* и се бележи така: $\beta=f'(c)$. Понеже чрез производната на f се съпоставя по едно число на всяко число от интервала $[a, b]$, тя е функция, дефинирана в същия интервал, и ще я бележим с f'.

Съгласно горните означения, ако f е нормална функция в интервала $[a, b]$ и c е число от този интервал, за всяко $x\in[a, b]$ е в сила представянето

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+R,$$

където $R\leqq A(x-c)^2$ при някое $A\geqq 0$ и всяко $x\in[a, b]$.

В по нататъшното изложение ще използуваме следното естествено обобщение на понятието нормална функция:

Да означим с $\langle a, b\rangle$ произволен интервал (краен, безкраен, затворен или не). Ще казваме, че f е *нормална функция в интервала* $\langle a, b\rangle$, ако е нормална във всеки краен затворен подинтервал на $\langle a, b\rangle$. Ясно е, че в случая, когато интервалът е краен и затворен, новата дефиниция за нормалност на функция съвпада със старата.

Ще добавим още, че за всяко c от $\langle a, b\rangle$ производната $f'(c)$ е еднозначно определена, т. е. нейната стойност не зависи от това, в кой краен затворен подинтервал на $\langle a, b\rangle$ разглеждаме f. За да докажем това, да означим с $[r, s]$ $(r<s)$ краен затворен подинтервал на $\langle a, b\rangle$, който съдържа точка c, като при това c е вътрешна за $[r, s]$, ако е вътрешна за $\langle a, b\rangle$. Означаваме с $\tilde{f}'(c)$ производната на f в точка c в случая, когато разглеждаме f като нормална функция в $[r, s]$. Нека сега $[p, q]$ $(p<q)$ е произволен краен затворен подинтервал на $\langle a, b\rangle$, съдържащ c. Тъй като f е нормална функция в този интервал, то

$$f(x)=f(c)+\tilde{f}'(c)(x-c)+\tilde{R} \quad (|\tilde{R}|\leqq\tilde{A}(x-c)^2)$$

(тук с $\tilde{f}'(c)$ сме означили производната на f в точка c в случая, когато разглеждаме f като нормална функция в интервала $[p, q]$). Ясно е, че $[r, s]\cap[p, q]$ е интервал, съдържащ c, който не се редуцира на точка (това следва от обстоятелството, че ако c е вътрешна за $\langle a, b\rangle$, $r<c<s$). От горното равенство, което е валидно за всяко $x\in[p, q]$, и от равенството

$$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+R \quad (|R|\leqq A(x-c)^2),$$

което е в сила за $x\in[r, s]$, чрез изваждане получаваме

$$[\tilde{f}'(c)-f'(c)](x-c)=R-\tilde{R},$$

което е изпълнено за $x\in[p, q]\cap[r, s]$. Но оттук следва, че за всяко такова x, което не съвпада с c, ще имаме

$$|\tilde{f}'(c)-f'(c)|\leqq(\tilde{A}-A)|x-c|,$$

а оттук и от лемата на с. 171 се вижда, че $|\tilde{f}'(c)-f'(c)|=0$. С това е доказано, че за всеки интервал $[p, q]\subset\langle a, b\rangle$, който съдържа c, производната $f'(c)$ на f (разглеждана като нормална функция в $[p, q]$) има една и съща стойност.

Ще казваме, че *една фунция f е липшицова в даден интервал*, ако може да се намери такава константа (липшицова константа) K, че за всеки две стойности на x: x_1 и x_2, от този интервал да е в сила неравенството

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqq K|x_1-x_2|.$$

Лесно се вижда, че ако f е нормална в крайния затворен интервал $[a, b]$, производната ѝ f' е липшицова в този интервал. Наистина, ако x_1 и x_2 са от $[a, b]$, от нормалността на f следват равенствата

$$f(x_1)=f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2)+R_1,$$

$$f(x_2)=f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)+R_2,$$

където $|R_i|\leqq A(x_2-x_1)^2$ за $i=1,2$. От горните равенства чрез почленно събиране получаваме

$$0=f'(x_2)(x_1-x_2)+f'(x_1)(x_2-x_1)+R_1+R_2,$$

откъдето

$$|f'(x_1)-f'(x_2)|\,|x_1-x_2|=|-R_1-R_2|\leqq|R_1|+|R_2|\leqq A(x_1-x_2)^2,$$

или окончателно

$$|f'(x_2)-f'(x_1)|\leqq 2A\,|x_1-x_2|.$$

Като имаме предвид доказаното, можем да твърдим, че f' е ограничена в интервала $[a, b]$. Наистина, ако в последното неравенство положим $x_2=x$ и фиксираме x_1, ще получим веригата от неравенства

$$|f'(x)|-|f'(x_1)|\leqq|f'(x)-f'(x_1)|\leqq 2A\,|x-x_1|\leqq 2A(b-a),$$

или

$$|f'(x)|\leqq|f'(x_1)|+2A(b-a).$$

От последното неравенство, което е валидно за всяко $x\in[a, b]$, се вижда, че f' е ограничена функция в $[a, b]$.

Ще докажем, че всяка нормална функция в интервала $[a, b]$ удовлетворява условието на Липшиц в този интервал.

Нека f е нормална в $[a, b]$. Тогава f' удовлетворява условието на Липшиц в този интервал. Следователно е ограничена. Нека $|f'(x)|\leqq M$ за всяко $x\in[a, b]$. Тогава за всеки избор на x_1 и x_2 от $[a, b]$ ще имаме

$$f(x_1)=f(x_2)+f'(x_2)(x_1-x_2)+R \quad (|R|\leqq A(x_1-x_2)^2),$$

откъдето получаваме

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqq|f'(x_2)|\,|x_1-x_2|+|R|\leqq M\,|x_1-x_2|+A(x_1-x_2)^2$$
$$\leqq[M+A(b-a)]\,|x_1-x_2|.$$

Тук липшицовата константа е $K=M+A(b-a)$.

Сега ще докажем няколко теореми за нормални функции.

Теорема 1 (производна на сума и разлика на две функции). *Ако f_1 и f_2 са нормални в $[a, b]$, то и функциите $f=f_1+f_2$, $\varphi=f_1-f_2$ са нормални в същия интервал, при което за всяко c от $[a, b]$ имаме $f'(c)=f_1'(c)+f_2'(c)$ и $\varphi'(c)=f_1'(c)-f_2'(c)$.*

Доказателство. Ще проведем доказателството за разликата на две нормални функции. Доказателството за сумата е напълно аналогично.

Нека $\varphi=f_1-f_2$. Функциите f_1 и f_2 удовлетворяват съотношенията

$$(5)\qquad \begin{aligned} f_1(x)&=f_1(c)+f_1'(c)(x-c)+R_1 \quad (|R_1|\leqq A_1(x-c)^2),\\ f_2(x)&=f_2(c)+f_2'(c)(x-c)+R_2 \quad (|R_2|\leqq A_2(x-c)^2)\end{aligned}$$

за всяко x от $[a, b]$, при всяко фиксирано c от същия интервал. Тогава за φ ще имаме при $x\in[a, b]$

$$\varphi(x)=f_1(x)-f_2(x)=f_1(c)-f_2(c)+[f_1'(c)-f_2'(c)](x-c)+R_1-R_2.$$

Но $|R_1-R_2|\leqq|R_1|+|R_2|\leqq A_1(x-c)^2+A_2(x-c)^2=(A_1+A_2)(x-c)^2$.
С това теоремата е доказана.

Теорема 2 (производна на произведение на две функции). *Ако f_1 и f_2 са нормални функции в интервала $[a, b]$, в същия интервал е нормална и функцията $f=f_1.f_2$. При това за производната $f'(c)$ в произволна точка c от интервала $[a, b]$ имаме*

$$f'(c)=f_1(c)f_2'(c)+f_1'(c).f_2(c).$$

Доказателство. Ще използуваме тъждеството

$$uv=u_0v_0+(u-u_0)v_0+(v-v_0)u_0+(u-u_0)(v-v_0),$$

което е в сила за всички стойности на u, v, u_0, v_0 и чието доказателство се свежда до непосредствена проверка. От него в частност получаваме, че за всяко x и всяко фиксирано c от $[a, b]$ имаме

$$f_1(x).f_2(x)=f_1(c).f_2(c)+[f_1(x)-f_1(c)]f_2(c)+[f_2(x)-f_2(c)]f_1(c_0)$$
$$+[f_1(x)-f_1(c)][f_2(x)-f_2(c)],$$

а като вземем предвид, че $f_1(x)-f_1(c)=f_1'(c)(x-c)+R_1$ и $f_2(x)-f_2(c)=f_2'(c)(x-c)+R_2$, където $|R_1|\leqq A_1(x-c)^2$, $|R_2|\leqq A_2(x-c)^2$, получаваме съотношенията

$$f_1(x)f_2(x)=f_1(c)f_2(c)+[f_1'(c)f_2(c)+f_2'(c)f_1(c)](x-c)+R.$$

Тук

$$R=R_1f_2(c)+R_2f_1(c)+[f_1(x)-f_1(c)][f_2(x)-f_2(c)].$$

Но f_1 и f_2 са ограничени в $[a, b]$, защото са липшицови. Нека M е горна граница за $|f_1|$ и $|f_2|$ и K_1 и K_2 са липшицовите константи за f_1 и f_2. Тогава

$$|R| \leqq MA_1(x-c)^2 + MA_2(x-c)^2 + K_1|x-c| \cdot K_2|x-c|$$
$$= [M(A_1+A_2)+K_1K_2](x-c)^2,$$

с което завършва доказателството на теоремата.

Забележка. Горните две теореми очевидно запазват своята валидност и за нормални функции в произволни интервали.

Теорема 3 (производна на частно на две функции). *Ако f_1 и f_2 са нормални в интервала $[a, b]$ и $|f_2(x)| \geqq l > 0$ за някое подходящо число l и за всяко x от $[a, b]$, то функцията $f = \frac{f_1}{f_2}$ е нормална в същия интервал и освен това за всяко c от този интервал имаме*

$$f'(c) = \frac{f_1'(c) f_2(c) - f_1(c) f_2'(c)}{f_2^2(c)}.$$

Доказателство. За да докажем теоремата, достатъчно е да покажем, че функцията $\frac{1}{f_2}$ е нормална в $[a, b]$ и да намерим производната ѝ в точка c. Тогава от теоремата за производна на произведение ще заключим, че $\frac{f_1}{f_2} = f_1 \cdot \frac{1}{f_2}$ е също нормална в $[a, b]$ и ще намерим нейната производна в точка c.

Нека x и c са от $[a, b]$. В сила са очевидните равенства

$$\frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{f_2(c)} + \left[\frac{1}{f_2(x)} - \frac{1}{f_2(c)}\right] = \frac{1}{f_2(c)} + \frac{f_2(c)-f_2(x)}{f_2(x) f_2(c)}$$
$$= \frac{1}{f_2(c)} + \frac{f_2(c)-f_2(x)}{f_2(c)} \frac{1}{f_2(x)}.$$

Като заменим в дясната страна на равенството $\frac{1}{f_2(x)}$ с равния му израз, получаваме

$$\frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{f_2(c)} + \frac{f_2(c)-f_2(x)}{f_2(c)}\left[\frac{1}{f_2(c)} + \frac{f_2(c)-f_2(x)}{f_2(c)} \frac{1}{f_2(x)}\right]$$
$$= \frac{1}{f_2(c)} + \frac{f_2(c)-f_2(x)}{f_2^2(c)} + \frac{[f_2(c)-f_2(x)]^2}{f_2^2(c) \cdot f_2(x)}.$$

Но $f_2(x) = f_2(c) + f_2'(c)(x-c) + R_2$, където $|R_2| \leqq A_2(x-c)^2$, така че

$$\frac{1}{f_2(x)} = \frac{1}{f_2(c)} - \frac{f_2'(c)}{f_2^2(c)}(x-c) + R.$$

Тук

$$R=-\frac{R_2}{f_2^2(c)}+\frac{[f_2(c)-f_2(x)]^2}{f_2^2(c)\cdot f_2(x)}.$$

Ако означим с l положително число, за което $|f_2(x)|\geqq l$ за всяко $x\in[a, b]$, а с K_2 — липшицовата константа за f_2, ще получим

$$|R|\leqq\frac{A_2}{l^2}(x-c)^2+\frac{K_2^2}{l^3}(x-c)^2=\left[\frac{A_2}{l^2}+\frac{K_2^2}{l^3}\right](x-c)^2.$$

И тъй $\frac{1}{f_2}$ е нормална в $[a, b]$, а производната ѝ в точка c е $-\frac{f_2'(c)}{f_2^2(c)}$. Тогава съгласно предишната теорема за производна на произведение функцията $\frac{f_1}{f_2}=f_1\cdot\frac{1}{f_2}$ ще бъде нормална в $[a, b]$, а производната ѝ ще бъде

$$f_1'(c)\cdot\frac{1}{f_2(c)}+f_1(c)\left[-\frac{f_2'(c)}{f_2^2(c)}\right]=\frac{f_1'(c)f_2(c)-f_1(c)f_2'(c)}{f_2^2(c)}.$$

Забележка. Твърдението на теоремата остава в сила и за произволен интервал, ако условията ѝ са изпълнени за всеки негов краен и затворен подинтервал

Следващата теорема дава правилото за намиране на производни на съставни нормални функции.

Теорема 4 (диференциране на съставни функции). *Нека f е нормална функция в крайния затворен интервал $[p, q]$, а g — нормална функция в крайния затворен интервал $[a, b]$ със стойности в интервала $[p, q]$ Тогава функцията φ, дефинирана за всяко $x\in[a, b]$ с равенството $\varphi(x)=f(g(x))$, е нормална в интервала $[a, b]$ и за всяко $x_0\in[a, b]$, $\varphi'(x_0)=f'(u_0)g'(x_0)$, където u_0 е кратко означение за $g(x_0)$.*

Доказателство. От нормалността на f и g в съответните интервали следва, че за всяко u от интервала $[p, q]$ и всяко x от $[a, b]$ ще имаме

$$f(u)=f(u_0)+f'(u_0)(u-u_0)+R\quad(|R|\leqq A(u-u_0)^2),$$

$$g(x)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)+R_1\quad(|R_1|\leqq A_1(x-x_0)^2).$$

Първото от горните две равенства е очевидно в сила, ако заменим u с $g(x)$, така че ще имаме

$$\varphi(x)=f(g(x))=f(u_0)+f'(u_0)(g(x)-u_0)+R\ (|R|\leqq A(g(x)-u_0)^2).$$

Но $g(x)-u_0=g(x)-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)+R_1$.
Следователно

$$\varphi(x)=f(g(x))=f(g(x_0))+f'(u_0)[g'(x_0)(x-x_0)+R_1]+R$$
$$=f(g(x_0))+f'(u_0)g'(x_0)(x-x_0)+f'(u_0)R_1+R.$$

Тъй като f' е ограничена в интервала $[p, q]$, т. е. $|f'(u)|\leqq M$ за всяко $u\in[p, q]$, то

$$|f'(u_0)R_1+R|\leqq M|R_1|+|R|\leqq MA_1(x-x_0)^2+A[g(x)-g(x_0)]^2.$$

Понеже g е нормална в интервала $[a, b]$, за всяко x от този интервал ще имаме

$$[g(x)-g(x_0)]^2=[g'(x_0)(x-x_0)+R_1]^2\leqq[|g'(x_0)|\,|x-x_0|+|R_1|]^2$$
$$\leqq[L|x-x_0|+A_1(x-x_0)^2]^2\leqq[L+A_1(b-a)]^2(x-x_0)^2.$$

Тук L е горна граница за $|g'(x)|$, когато x пробягва $[a, b]$. По такъв начин получаваме окончателно

$$|f'(u_0)R_1+R|\leqq\{MA_1+A[L+A_1(b-a)]^2\}(x-x_0)^2,$$

което показва, че функцията със стойности $\varphi(x)=f(g(x))$ $(x\in[a, b])$ е нормална в интервала $[a, b]$, а производната ѝ в коя да е точка x_0 е $f'(x_0)=f'(g(x_0)).g'(x_0)$. С това теоремата е доказана.

Следствие. Нека f е нормална функция в интервала $\langle p', q'\rangle$, а g е нормална функция в интервала $\langle a', b'\rangle$. Предполагаме при това, че когато x пробягва кой да е краен затворен подинтервал $[a, b]$ на интервала $\langle a', b'\rangle$, функционните стойности на g се съдържат в подходящ краен затворен подинтервал $[p, q]$ на интервала $\langle p', q'\rangle$. Тогава сложната функция, дефинирана за всяко $x\in\langle a', b'\rangle$ с равенството $\varphi(x)=f(g(x))$, е нормална в интервала $\langle a', b'\rangle$ и за всяко x от $\langle a', b'\rangle$ имаме $\varphi'(x)=f'(g(x)).g'(x)$.

За да докажем горното следствие, ще означим (както по-горе) с $[a, b]$ произволен краен затворен подинтервал на интервала $\langle a', b'\rangle$ и с $[p, q]$ — краен затворен подинтервал на интервала $\langle p', q'\rangle$, в който се съдържат функционните стойности на g, когато x пробягва $[a, b]$. Съгласно горната теорема φ е нормална в интервала $[a, b]$ и за производната ѝ имаме $\varphi'(x)=f'(g(x))\times g'(x)$ при всяко x от този интервал. Понеже $[a, b]$ е произволно избран краен затворен подинтервал на интервала $\langle a', b'\rangle$, то φ

---

* Да напомним, че с $\langle s, r\rangle$ означаваме произволен интервал (краен, безкраен, затворен или не).

е нормална в интервала $\langle a', b'\rangle$ и за всяко x от този интервал имаме $\varphi'(x)=f'(g(x))g'(x)$.

Пример. Не е трудно да се съобрази, че всяка рационална функция от вида $f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$, където знаменателят е полином, който не се анулира тъждествено, е нормална функция във всеки краен затворен интервал, в който $|b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m|\geqq l>0$. Най-напред ясно е, че функцията $\varphi(x)=x$ е нормална в интервала $(-\infty, +\infty)$ и производната ѝ е $\varphi'(x)=1$. Това следва от тъждеството $x=x_0+1(x-x_0)+R$, където $R\equiv 0$. Оттук от теоремата за производна на произведение (теорема 2) и от забележката след нея следва, че функцията $\psi(x)=x^n$ е също нормална в интервала $(-\infty, +\infty)$ и $\psi'(x)=nx^{n-1}$. Последното твърдение се доказва индуктивно по отношение на n. Като имаме предвид още, че функцията $g(x)=c$ е също нормална в интервала $(-\infty, +\infty)$ и $g'(x)=0$, както и теорема 1, лесно заключаваме, че полиномите $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ и $b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$ са също нормални в интервала $(-\infty, +\infty)$ и производните им във всяка точка x са съответно $na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}$ и $mb_0x^{m-1}+(m-1)b_1x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}$. Нека сега $|b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m|\geqq l>0$ за всяко x от интервала $[a, b]$. Оттук и от теоремата за производна на частно (теорема 3) веднага следва, че функцията $f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$ е нормална в интервала $[a, b]$ и производната ѝ е

$$f'(x)=\frac{[na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}][b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m]}{(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m)^2}$$

$$-\frac{[a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n][mb_0x^{m-1}+(m-1)b_1x^{m-2}+\ldots+b_{m-1}]}{(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m)^2}$$

Следващата теорема има важни приложения.

Теорема 5 (основна теорема за монотонност). *Ако функцията f е нормална в интервала $\langle a, b\rangle$ и $f'(x)\geqq 0$ за всяко x от този интервал, то f е растяща функция в $\langle a, b\rangle$, т. е. $f(x_2)\geqq f(x_1)$ винаги когато $x_2>x_1$ и $x_1, x_2\in\langle a, b\rangle$.*

Доказателство. Нека x' и x'' $(x'<x'')$ са две числа от интервала $\langle a, b\rangle$. От условието за нормалност на f в интервала $[x', x'']$ за всеки избор на x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$ от този интервал имаме представянето

(6) $$f(x_2)=f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)+R,$$

където $|R|\leqq A(x_2-x_1)^2$. Тук константата A зависи от избора на x' и x'', но не и от избора на x_1 и x_2 в интервала $[x', x'']$. Като вземем предвид, че $f'(x_1)\geqq 0$, $x_2-x_1>0$ и $R\geqq -|R| \geqq -A(x_2-x_1)^2$, получаваме от (6) неравенството

(7) $$f(x_2)-f(x_1)\geqq -A(x_2-x_1)^2.$$

Делим интервала $[x_1, x_2]$ на две равни части. Прилагаме неравенството (7) към двойката точки $\frac{x_1+x_2}{2}$, x_2, както и към двойката точки x_1, $\frac{x_1+x_2}{2}$ и получаваме неравенствата

$$f(x_2)-f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqq -\frac{A}{4}(x_2-x_1)^2,$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-f(x_1)\geqq -\frac{A}{4}(x_2-x_1)^2.$$

Като ги съберем, намираме

$$f(x_2)-f(x_1)\geqq -\frac{A}{2}(x_2-x_1)^2.$$

Последното неравенство е в сила при всеки избор на точките x_1 и x_2 в интервала $[x', x'']$ (стига, разбира се, да имаме $x_1<x_2$). Като повторим n пъти горните разсъждения, ще получим, че при всеки избор на x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$ от интервала $[x', x'']$ имаме

$$f(x_2)-f(x_1)\geqq -\frac{A}{2^n}(x_2-x_1)^2.$$

Специално за x' и x'' получаваме

$$f(x'')-f(x')\geqq -\frac{A}{2^n}(x''-x')^2.$$

Ще покажем, че $f(x'')-f(x')\geqq 0$. Да допуснем противното, т. е. че $f(x'')-f(x')<0$. Тогава $2^n\leqq A\,\frac{(x''-x')^2}{f(x')-f(x'')}$. От друга страна, $2^n>n$, така че

$$n<A\,\frac{(x''-x')^2}{f(x')-f(x'')}.$$

И тъй получихме една горна граница за съвкупността от целите положителни числа, което противоречи на аксиомата на Архимед. С това доказателството е завършено.

Следствие 1. *Ако f е нормална функция в интервала $\langle a, b\rangle$ и $f' \equiv 0$, то f е константа.*

За да докажем това, достатъчно е да вземем предвид, че $f'(x) \geqq 0$ и $f'(x) \leqq 0$ в интервала $\langle a, b\rangle$. Оттук и от горната теорема следва, че f и $-f$ са растящи в този интервал, т. е. f е константа.

Следствие 2. *Ако две функции f_1 и f_2 са нормални и имат равни производни в даден интервал $\langle a, b\rangle$, то за всяко x от този интервал $f_1(x) = f_2(x) + c$, където c е подходяща константа.*

За да се убедим в това, достатъчно е да образуваме функцията $\varphi = f_1 - f_2$ и да приложим следствие 1.

Следствие 3. *Ако f е нормална в $\langle a, b\rangle$ и $f'(x) > 0$ за всяко $x \in \langle a, b\rangle$, то f е строго растяща в $\langle a, b\rangle$, т. е. от $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ и $x_1 < x_2$ следва, че $f(x_1) < f(x_2)$. Наистина, ако допуснем, че $f(x_1) = f(x_2)$, то би излязло, че f е константа в $[x_1, x_2]$ и в такъв случай за всяко x и c от $[x_1, x_2]$ бихме имали*

$$f(x) = f(c) + 0\,(x - c) + 0,$$

откъдето следва, че $f'(c) = 0$, а това противоречи на предположението, че $f'(x) > 0$ за всяко $x \in \langle a, b\rangle$.

ПРИМИТИВНИ ФУНКЦИИ НА НОРМАЛНИ ФУНКЦИИ

Преди да въведем понятието примитивна функция, ще докажем една теорема за нормални функции, чието твърдение е в основата на възприетата от нас дефиниция за примитивна функция.

Теорема 6. *Нека F е нормална функция в интервала $\langle a, b\rangle$ и нека за всяко x от един негов краен затворен подинтервал $[p, q]$ са изпълнени неравенствата*

$$\mu \leqq F'(x) \leqq \nu.$$

Тогава са изпълнени и неравенствата

$$\mu \leqq \frac{F(q) - F(p)}{q - p} \leqq \nu.$$

Доказателство. Нека $[p, q] \subset \langle a, b\rangle$ и нека за всяко x от интервала $[p, q]$ е в сила неравенството $\mu \leqq F'(x)$. Разглеждаме функцията φ, зададена в интервала $[p, q]$ с равенството

$$\varphi(x) = F(x) - \mu x.$$

Очевидно е, че φ е нормална в $[p, q]$, защото е разлика на нормални функции. За производната ѝ имаме

$$\varphi'(x)=F'(x)-\mu.$$

Следователно $\varphi'(x)\geqq 0$ за всяко x от $[p, q]$. Съгласно теорема 5 φ е растяща в този интервал. По-специално ще имаме $\varphi(p)\leqq\varphi(q)$, което, написано по подробно, ни дава

$$F(p)-\mu p\leqq F(q)-\mu q,$$

или

$$\mu\leqq\frac{F(q)-F(p)}{q-p}.$$

Ако F' удовлетворява неравенството $F'(x)\leqq\nu$ за $x\in[p, q]$, като положим $\varphi(x)=\nu x-F(x)$ и повторим горните разсъждения, ще получим неравенството

$$\frac{F(q)-F(p)}{q-p}\leqq\nu.$$

Понеже p и q са произволно избрани в интервала $\langle a, b\rangle$, то F удовлетворява твърдението на теоремата.

Както споменахме, ще дефинираме понятието примитивна функция с помощта на твърдението на теорема 6. По-точно казано, ще дадем следната дефиниция:

Нека F и f са две функции, дефинирани в един и същ интервал $\langle a, b\rangle$. Казваме, че *F е примитивна на f в интервала $\langle a, b\rangle$*, когато f е ограничена във всеки краен затворен подинтервал $[p, q]$ на $\langle a, b\rangle$ и е изпълнено следното условие: ако неравенствата

$$\mu\leqq f(x)\leqq\nu$$

са в сила при някой избор на числата μ и ν и всяко x от интервала $[p, q]$, то в сила са и неравенствата

$$\mu\leqq\frac{F(q)-F(p)}{q-p}\leqq\nu.$$

При тази дефиниция на примитивна функция теорема 6 показва, че всяка нормална функция е примитивна на своята производна.

Знаем, че производната f' на всяка нормална функция f в даден интервал $[a, b]$ е липшицова в този интервал, т. е. за всяка двойка точки x_1 и x_2 от $[a, b]$ удовлетворява неравенството

$$|f'(x_1)-f'(x_2)|\leqq K|x_1-x_2|$$

при подходящ избор на числото K. Това означава, че ако някоя функция не удовлетворява условието на Липшиц в интервала $[a, b]$,

тя не може да бъде производна на нормална функция. Като имаме предвид това, лесно съобразяваме, че следващата теорема е в известен смисъл обратна на теорема 6.

Теорема 7. *Нека f е липшицова във всеки краен и затворен подинтервал на интервала $\langle a, b\rangle$, а F е примитивна на f в същия интервал. Тогава F е нормална в интервала $\langle a, b\rangle$ и $F'(x)=f(x)$ за всяко x от $\langle a, b\rangle$.*

Доказателство. Нека $[a', b']$ е краен затворен подинтервал на интервала $\langle a, b\rangle$. Понеже f е липшицова в $[a', b']$, то за някое $K>0$ и при всеки избор на числата x_1 и x_2 от $[a', b']$ ще имаме

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqq K|x_1-x_2|,$$

откъдето следват неравенствата

$$f(x_2)-K|x_2-x_1|\leqq f(x_1)\leqq f(x_2)+K|x_2-x_1|.$$

Да означим с $[p, q]$ $(p<q)$ произволен краен затворен подинтервал на интервала $[a', b']$. Ако положим $x_2=p$, изберем x_1 произволно в интервала $[p, q]$ и вземем предвид, че $|x_1-x_2|\leqq q-p$, ще получим

$$f(p)-K(q-p)\leqq f(x_1)\leqq f(p)+K(q-p).$$

Понеже F е примитивна на f, ще са в сила и неравенствата

$$f(p)-K(q-p)\leqq \frac{F(q)-F(p)}{q-p}\leqq f(p)+K(q-p),$$

откъдето получаваме

$$|F(q)-F(p)-f(p)(q-p)|\leqq K(q-p)^2.$$

Ако положим $R=F(q)-F(p)-f(p)(q-p)$ и вземем предвид, че в последното неравенство p и q са избрани произволно в интервала $[a', b']$, получаваме, че F е нормална в този интервал и освен това $F'(x)=f(x)$ за $x\in[a', b']$. Тъй като $[a', b']$ е произволен краен затворен подинтервал на интервала $\langle a, b\rangle$, то F е нормална в $\langle a, b\rangle$ и за всяко x от $\langle a, b\rangle$ имаме $F'(x)=f(x)$.

ОБОБЩЕНИ ОБЕМИ, ЛИЦА И ДЪЛЖИНИ

Тук ще докажем една теорема за съществуване на обобщени обеми на произволни тела в тримерното пространство, която ще използуваме по-нататък. Доказателството не е елементарно и използува сложен математически апарат. По тази причина

в някои случаи (например, когато тази материя се излага пред ученици от средното училище), е целесъобразно тя да се формулира като аксиома.

Ако се условим за краткост да наричаме тяло всяко ограничено точково множество в пространството (т. е. точково множество, което се съдържа в някое кълбо с достатъчно голям радиус), теоремата за съществуване на обобщени обеми може да се формулира по следния начин:

Теорема 8 (съществуване на обобщени обеми). *На всяко тяло T в пространството може да се съпостави неотрицателно число (обобщен обем) $\nu(T)$ така, че да са изпълнени следните условия:*

а) *На паралелепипед T с дължини на страните a, b, c е съпоставено числото $\nu(T)=a.b.c$.*

б) *Ако T_1 и T_2 са две тела без общи точки, то*

$$\nu(T_1 \cup T_2)=\nu(T_1)+\nu(T_2).$$

Нека отбележим веднага — теоремата не твърди, че ако T_1 и T_2 са еднакви фигури, то $\nu(T_1)=\nu(T_2)$. Такова твърдение изобщо не може да се докаже, защото не е вярно.

Преди да докажем теоремата, ще изведем две непосредствени следствия от нея. Ако се условим да наричаме фигура всяко ограничено точково множество в равнината (т. е. множеството, което се съдържа в кръг с достатъчно голям радиус), в сила е следното:

Следствие (съществуване на обобщено лице). *На всяка фигура Q в равнината може да се съпостави неотрицателно число $\mu(Q)$ (обобщено лице) така, че да са изпълнени следните условия:*

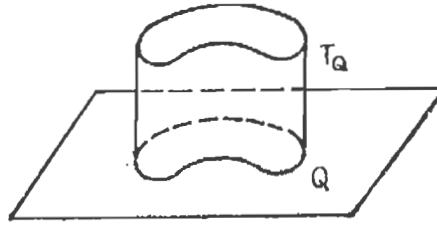
а$_1$) *На правоъгълник Q с дължини на страните a и b е съпоставено числото $\mu(Q)=a.b$.*

б$_1$) *Ако Q_1 и Q_2 са две фигури без общи точки, то*

$$\mu(Q_1 \cup Q_2)=\mu(Q_1)+\mu(Q_2).$$

За да докажем това следствие, постъпваме по следния начин: Избираме едно от двете полупространства, определени от дадената равнина, и за всяка фигура Q, лежаща в равнината, разглеждаме цилиндричното тяло T_Q с основа Q, височина единица и образуващи, перпендикулярни на равнината, което тяло лежи изцяло в избраното от нас полупространство (черт. 2). На фигурата Q съпоставяме числото $\mu(Q)=\nu(T_Q)$ (т. е. обобщения обем

на цилиндъра). Веднага се вижда, че по този начин на всяка фигура е съпоставено неотрицателно число, което удовлетворява условията $а_1$) и $б_1$). Аналогично следствие може да се формулира и за правата.



Черт. 2

Следствие (съществуване на обобщени дължини). *На всяко ограничено точково множество L върху дадена права (т. е. множество, което се съдържа в някоя отсечка) може да се съпостави число (което ще наричаме обобщена дължина) така, че да са изпълнени следните две условия:*

$а_2$) *На отсечка L с дължина a е съпоставено числото* $\lambda(L)=a$.

$б_2$) *Ако* L_1 *и* L_2 *са две ограничени точкови множества върху правата без общи точки, то*

$$\lambda(L_1 \cup L_2)=\lambda(L_1)+\lambda(L_2).$$

Доказателството е съвсем аналогично на доказателството на предишното следствие, поради което го предоставяме на читателя. Ще споменем още следного: от теоремата за съществуване на обобщени обеми следва че ако T_1 и T_2 са две тела и ако $T_1 \subset T_2$, то $\nu(T_1) \leqq \nu(T_2)$. Наистина имаме $\nu(T_1)+\nu(T_2 \setminus T_1)=\nu(T_2)$, откъдето веднага следва въпросното неравенство.

Аналогична бележка е валидна за обобщените лица и обобщените дължини.

Доказателство на теорема 8. Най-напред ще формулираме онези факти, които се използват при доказателството на теоремата.

Казваме, че едно множество A е частично наредено, ако за някои двойки от негови елементи е зададена релация, която бележим със знака „$\prec$" и която е транзитивна, т. е. ако $\alpha_1 \prec \alpha_2$ и $\alpha_2 \prec \alpha_3$, то $\alpha_1 \prec \alpha_3$. При това $\alpha' \prec \alpha''$ ще означаваме още така: $\alpha'' \succ \alpha'$, и ще казваме, че α'' е по-голямо от α' (мажорира α') или α' е по-малко от α''.

Нека A е частично наредено множество, всеки два елемента на което се мажорират от някой елемент на A. При това допълнително условие казваме, че A е насочена система. Като пример за насочена система може да служи множеството от естествените

числа при естествената наредба или множеството от реалните числа при същата наредба.

Ако на всеки елемент $\alpha \in A$ от една насочена система A съпоставим елемент s_α от някое множество S, казваме, че ни е дадена обобщената редица (или накратко редицата) $\{s_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Да разгледаме частния случай, когато S е множеството на реалните числа. В този случай редицата $\{s_\alpha\}_{\alpha \in A}$ наричаме числова редица. За такава числова редица казваме, че е *сходяща и клони към числото* a, ако за всеки отворен интервал (p, q), който съдържа a, може да се намери такова $\alpha' \in A$, че от $\alpha \succ \alpha'$ да следва $s_\alpha \in (p, q)$.

Нека са ни дадени две насочени системи A и B и нека φ е функция, дефинирана в B със стойности от A. Предполагаме още, че са изпълнени следните условия:

1. Ако $\beta_1 \prec \beta_2$ $(\beta_1, \beta_2 \in B)$, то $\varphi(\beta_1) \prec \varphi(\beta_2)$ (монотонност на функцията φ).

2. За всяко $\alpha_0 \in A$ може да се намери такова $\beta_0 \in B$, че $\alpha_0 \prec \varphi(\beta_0)$ (неограниченост на φ).

За краткост стойностите на φ ще означаваме с α_β.

Ако $\{s_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е обобщена редица, обобщената редица $\{s_{\alpha_\beta}\}_{\beta \in B}$ (тук функцията φ със стойности $\varphi(\beta) = \alpha\beta$ удовлетворява условията 1 и 2) наричаме подредица на $\{s_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Ако е дадена функцията ψ, дефинирана в някоя насочена система Γ и със стойности от B, то стойностите $\varphi(\psi(\gamma))$ на получената сложна функция ще означаваме накратко с $\alpha\beta_\gamma$.

Пример. Нека A и B съвпадат с множеството N на естествените числа при естествената наредба и нека $\varphi(n) = 2n$ за всяко естествено n. Очевидно φ удовлетворява условията 1 и 2. Ако $\{s_n\}_{n \in N}$ е дадена редица, то $\{s_{\varphi(n)}\}_{n \in N}$ или, другояче записано, $\{s_{2n}\}_{n \in N}$ е подредица на $\{s_n\}_{n \in N}$.

Една обобщена числова редица $\{s_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е ограничена, ако съществуват число M и $\alpha_0 \in A$ такива, че за всички α, по-големи от α_0, да имаме $|s_\alpha| \leqq M$ (нека подчертаем, че една обобщена редица може да е ограничена и същевременно числовото множество, съставено от нейните членове, да не е ограничено).

По-нататък ще използуваме следните теореми:

Теорема I. *От всяка ограничена обобщена числова редица може да се избере сходяща подредица.*

Теорема II. *Ако една обобщена числова редица е сходяща, всяка нейна подредица е също сходяща и клони към същата граница.*

Казаното дотук ни дава възможност да формулираме един частен случай от т. нар. диагонален принцип, който ще използуваме по-нататък.

Нека Q е напразно множество, а A — насочена система. Нека $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е редица от числови функции, дефинирани в Q. В сила е следната

Теорема III (диагонален принцип). *Нека $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ притежава свойството за всяко $q \in Q$ числовата редица $\{f_\alpha(q)\}_{\alpha \in A}$ да е ограничена. Тогава съществува такава подредица от функции $\{f_{\alpha_\delta}\}_{\delta \in \Delta}$ на редицата $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$, че при всяко $q \in Q$ числовата редица $\{f_{\alpha_\delta}(q)\}_{\delta \in \Delta}$ да е сходяща.*

Забележка. По-подробни сведения за дефинициите, предшествуващи теореми I, II, III, както и за доказателствата на тези теореми, читателят може да намери в книгите: Дж. Л. Кели, Обща топология. С., 1971 и Ив. Проданов, Увод във функционалния анализ, първа част, С., 1982.

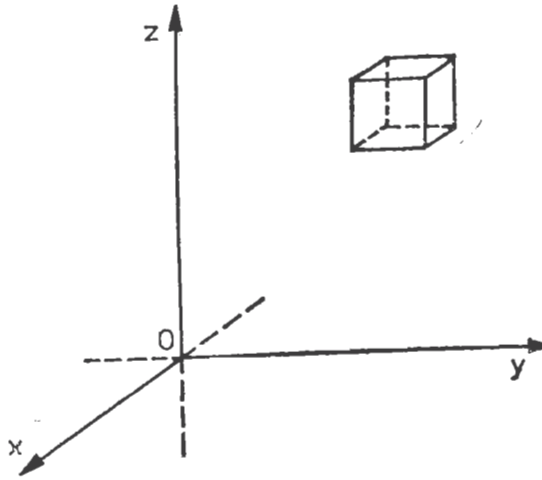
В следващото изложение ще считаме, че са известни понятията жорданова мярка в пространството, троен риманов интеграл, линеен позитивен функционал, както и топологичните понятия затворено и отворено точково множество в пространството, равнината и правата.

След тези предварителни сведения ще пристъпим към доказателството на теоремата на съществуване на обобщени обеми.

Нека ни е дадена в пространството правоъгълна координатна система. Разглеждаме множеството $\mathcal{J}$ на всички ограничени реални числови функции, които са дефинирани за всяка точка от пространството и чиито носители са ограничени множества. Тук под „носител" на дадена функция разбираме най-малкото затворено множество от точки в пространството, извън което функцията се анулира. Понеже $\mathcal{J}$ съдържа заедно с всеки две функции и линейната им комбинация с произволни коефициенти, то $\mathcal{J}$ е линейно пространство.

С помощта на теорема III (диагоналния принцип) ще дефинираме един линеен позитивен функционал върху $\mathcal{J}$. За тази цел означаваме с n произволно естествено число и построяваме в пространството мрежа от кубове със страни $\frac{1}{n}$, образувани от пресичането на равнини, успоредни на равнината xOy и минаващи през точките $\left(0, 0, \frac{k}{n}\right)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, равнини, успоредни на равнината xOz и минаващи през точките $\left(0, \frac{k}{n}, 0\right)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, както и равнини, успоредни на равнината yOz и минаващи през точките $\left(\frac{k}{n}, 0, 0\right)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ (вж.

черт.3). За краткост тази мрежа от кубове с дължини на страните $\frac{1}{n}$ ще наричаме n-та мрежа. Нареждаме кубовете от n-тата мрежа в редица $T_1^n, T_2^n, \ldots, T_i^n, \ldots$



Черт. 3

Това е възможно, защото те образуват изброимо множество. Избираме в T_i^n една точка $(\xi_i^n, \eta_i^n, \zeta_i^n)$ (например центъра на i-тото кубче) и съпоставяме на всяка функция f от $\mathscr{J}$ числото $L_n(f)$, определено с равенството

$$L_n(f) = \sum_{i=1}^{\infty} f(\xi_i^n, \eta_i^n, \zeta_i^n) \frac{1}{w^3}. \tag{8}$$

Горният ред всъщност е крайна сума, защото f има ограничен носител и следователно само краен брой от числата $f(\xi_i^1, \eta_i^1, \zeta_i^1)$ $(i=1, 2, \ldots)$ са различни от нула. Също тъй очевидно е, че L_n е линеен позитивен функционал, защото от равенството $f=\alpha f_1 + \beta f_2$ (където f_1 и f_2 са от $\mathscr{J}$, а α, β са числа) следва, че f е също от $\mathscr{J}$ и освен това

$$L_n(f) = \alpha L_n(f_1) + \beta L_n(f_2),$$

а от неравенството $f(x, y, z) \geqq 0$ при всички стойности на x, y, z следва неравенството $L_n(f) \geqq 0$.

Ако дадем на n последователно стойности 1, 2, . . . , ще получим една редица от мрежи с намаляващи размери на съставящите ги кубчета, а заедно с това и една редица от линейни позитивни функционали $\{L_n\}_{n \in N}$.

Нека f е функция от $\mathcal{J}$, чийто носител B е измерим в жорданов смисъл и нека f е интегрируема в риманов смисъл върху своя носител. Тогава редицата $\{L_n(f)\}_{n \in N}$ е сходяща и границата ѝ е $\iiint\limits_B f(x, y, z)\, dxdydz$. За да докажем това, достатъчно е да включим носителя B в един куб T' със стени, успоредни на координатните равнини, и върхове, чиито координати са цели числа. Нека отбележим веднага, че стените на куба T' лежат в равнини, които участвуват в образуването на n-тата мрежа при всяка стойност на n. Това следва от факта, че T' има върхове с целочислени координати. Оттук следва, че T' съдържа дадено кубче от n-тата мрежа тогава и само тогава, когато съдържа центъра му. Понеже f се анулира извън B, тя е интегрируема в T'.

Разглеждаме дефиниционния ред (8), чрез който се задава $L_n(f)$, и в него пренебрегваме всички членове, за които точките $(\xi_i^n, \eta_i^n, \zeta_i^n)$ $(i=1, 2, \ldots)$ не лежат в T'. От това сумата на реда не се изменя, тъй като всички пренебрегнати членове са нули. Означаваме със $\Sigma' f(\xi_i^n, \eta_i^n, \zeta_i^n) \cdot \frac{1}{n^3}$ сумата от останалите краен брой членове на реда (8). За всеки от тях точката $(\xi_i^n, \eta_i^n, \zeta_i^n)$ се съдържа в T' заедно със съответното кубче от n-тата мрежа, като същевременно обединението на тези кубчета дава точно T'. Но в такъв случай редуцираната крайна сума $\Sigma' f(\xi_i^n, \eta_i^n, \zeta_i^n) \frac{1}{n^3}$ е риманова сума за f в куба T'. Когато n расте, размерите на кубчетата от n-тата мрежа клонят към нула. Следователно ще имаме

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \lim_{n\to\infty} \Sigma' f(\xi_i^n, \eta_i^n, \zeta_i^n) \frac{1}{n^3}$$

$$= \iiint\limits_{T'} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_B f(x, y, z) dxdydz.$$

От последните съотношения между другото следва, че ако χ_B е характеристична функция за някое измеримо в жорданов смисъл множество B, т. е.

$$\chi_B(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{за } (x, y, z) \in B \\ 0 & \text{за } (x, y, z) \overline{\in} B, \end{cases}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\chi_B) = \iiint_B \chi_B(x, y, z)\, dxdydz = \nu(B),$$

където $\nu(B)$ означава жордановата мярка (обема) на B. Специално, ако B е паралелепипед с дължини на страните a, b и c, то

$$\lim_{n\to\infty} L_n(\chi_B) = \nu(B) = a \cdot b \cdot c.$$

С помощта на диагоналния принцип ще покажем съществуването на подредица на редицата $\{L_n\}_{n\in N}$, която е сходяща за всяка функция f от $\mathscr{J}$. За тази цел достатъчно е да покажем, че при произволно фиксирано f от $\mathscr{J}$ редицата $\{L_n(f)\}_{n\in N}$ е ограничена. И така нека $f\in\mathscr{J}$ и нека B е носителят на f. Избираме куб, който има върхове с целочислени координати и съдържа B. Ако дължината на страната му е k (k е естествено число), то T' ще съдържа точно $(kn)^3$ кубчета от n-тата мрежа. Нека $M = \sup\limits_{(x, y, z)\in B} |f(x,y,z)|$.

Тогава ще имаме

$$|L_n(f)| = |\Sigma' f(\xi_i^n, \eta_i^n, \zeta_i^n) \frac{1}{n^3}| \leqq M \Sigma' \frac{1}{n^3} = M (kn)^3 \cdot \frac{1}{n^3} = Mk^3,$$

т. е. редицата $\{L_n(f)\}_{n\in N}$ е ограничена. Оттук и от диагоналния принцип следва съществуването на такава подредица $\{L_{n_\delta}\}_{\delta\in\Delta}$ на редицата $\{L_n\}_{n\in N}$, че всяка от числовите редици $\{L_{n_\delta}(f)\}_{\delta\in\Delta}$ $(f\in\mathscr{J})$ е сходяща. Разбира се, ако f е интегрируема в риманов смисъл в своя носител B, то $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(f) = \iiint_B f(x, y, z)\, dxdydz$, така че и подредицата $\{L_{n_\delta}(f)\}_{\delta\in\Delta}$ ще е сходяща и ще има същата граница. Да положим за всяко f от $\mathscr{J}$

$$\lim_{\delta} L_{n_\delta}(f) = L(f).$$

От начина, по който дефинирахме $L(f)$, за всяко f от $\mathscr{J}$ се вижда, че L е линеен позитивен функционал. Наистина от равенството

$$L_{n_\delta}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha L_{n_\delta}(f_1) + \beta L_{n_\delta}(f_2)$$

с граничен преход получаваме равенството

$$L(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha L(f_1) + \beta L(f_2).$$

Ако $f \geqq 0$, то $L_{n_\delta}(f) \geqq 0$ за всяко $\delta\in\Delta$. Следователно $L(f) \geqq 0$.

Нека сега T е произволно тяло. Под обобщен обем (или накратко обем) на T ще разбираме числото $\nu(T)$, дефинирано с равенството

$$\nu(T) = L(\chi_T),$$

където χ_T е характеристичната функция на T (очевидно $\chi_T \in \mathscr{J}$). От казаното е ясно, че ако T е измеримо в жорданов смисъл, $\nu(T)$ съвпада с жордановата му мярка. Специално, ако T е паралелепипед със страни a, b и c, то $\nu(T)=a.b.c$.

Лесно се вижда, че обемът е адитивна функция. За да се убедим в това, да разгледаме две произволни тела T_1 и T_2 без общи точки. Очевидно е, че в такъв случай характеристичните функции χ_{T_1} и χ_{T_2} са свързани с тъждеството

$$\chi_{T_1}+\chi_{T_2}=\chi_{T_1 \cup T_2}.$$

Но тогава имаме

$$\nu(T_1)+\nu(T_2)=L(\chi_{T_1})+L(\chi_{T_2})=L(\chi_{T_1 \cup T_2})=\nu(T_1 \cup T_2).$$

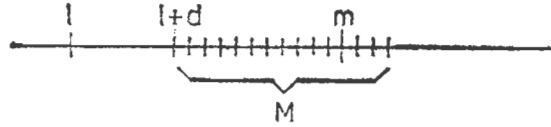
Така съпоставяме на всяко тяло T от пространството едно неотрицателно число $\nu(T)$ по такъв начин, че да удовлетворява условията а) и б), с което доказателството на теоремата за съществуване на обобщени обеми е завършено.

В горното доказателство използувахме апарат, който го прави твърде сложно за студенти от началните курсове, а още повече за ученици. По тази причина, както вече споменахме, целесъобразно е теорема 8 да се дава на учениците под формата на аксиома. От една страна, такава аксиома отговаря на интуитивните представи на учениците и лесно би била възприета от тях. От друга, тя е твърде силна и има важни следствия. Едно от тези следствия е принципът за непрекъснатост на реалните числа. По-подробно казано, ако в едно числово поле са в сила обичайните закони, на които се подчиняват равенството, алгебричните действия и наредбата, и ако за това поле е в сила теорема 8 (формулирана като аксиома), в това поле е изпълнен и принципът за непрекъснатост, формулиран в следващата теорема.

Теорема 9 (принцип за непрекъснатост на реалните числа). *Ако M е ограничено отдолу непразно числово множество, сред всичките негови долни граници има една най-голяма, която ще наричаме точна долна граница.*

Доказателство. Разглеждаме числовата права, означаваме с l една долна граница на M и съпоставяме на всяко число m от M интервала $[l, m]$ (черт. 4). Оставяме m да пробягва всички числа от M и образуваме сечението на всички интервали от вида $[l, m]$. Точка l принадлежи на това сечение, следователно то не е празно. Сечението S е ограничено множество, защото се съдържа в кой да е интервал от вида $[l, m]$. Означаваме с $\alpha (\alpha \geqq 0)$ обобщената дължина на това сечение. Понеже S се съдържа във всички интервали от вида $[l, m]$, то $\alpha \leqq m-l$ или $l+\alpha \leqq m$ за вся-

ко $m \in M$. С това е доказано, че числото $l+\alpha$ е долна граница на M. Ще докажем, че $l+\alpha$ е най-голямата долна граница на M. Наистина нека l' е някоя долна граница на M. Искаме да докажем, че $l' \leqq l+\alpha$. Това е очевидно, ако $l' \leqq l$, защото $\alpha \geqq 0$. Пора-



Черт. 4

ди това ще разгледаме случая $l<l'$. Но тогава интервалът $[l, l']$ ще се съдържа във всеки интервал от вида $[l, m]$, където $m \in M$ (защото $l' \leqq m$) и следователно ще се съдържа и в сечението S. Оттук получаваме, че $l'-l \leqq \alpha$ или $l' \leqq l+\alpha$, т. е. долната граница $l+\alpha$ е по-голяма или равна на коя да е долна граница l' на M.

Следствие. *Ако M е ограничено отгоре непразно множество, сред неговите горни граници има една най-малка, която наричаме точна горна граница.*

За да докажем това, образуваме множеството P от всички горни граници на M. То е ограничено отдолу например с произволен елемент m на M. Следователно съгласно теорема 9 има точна долна граница l''. От дефиницията на l'' следва, че l'' не надминава никой елемент на P, т. е. не надминава никоя горна граница на M. За да завършим доказателството, остава да докажем, че l'' е горна граница на M, т. е. че за всеки елемент m на M имаме $l'' \geqq m$. Наистина, понеже l'' е най-голямата долна граница на P, за всяко $r>l''$, а следователно и за всяко r от интервала $(l'', l''+1)$ ще имаме $r \geqq m$, където m е произволно фиксирано число от M. Но тогава съгласно лемата на с. 171 $l'' \geqq m$.

Принципът за непрекъснатост позволява да се докажат следващите теореми от диференциалното смятане, които имат важни приложения:

Теорема 10. *Ако f е липшицова в интервала $[a, b]$ и ако в краищата на интервала приема стойности с различни знаци, то има поне една точка в интервала (a, b), в която f се анулира.*

Доказателство. Нека за определеност $f(a)>0$ и $f(b)<0$ (случаят, когато $f(a)<0$ и $f(b)>0$, се разглежда аналогично). Разглеждаме множеството M на всички точки x от интервала $[a, b]$, за които $f(x)>0$. Това множество не е празно, защото съдържа точката a То е ограничено отгоре, защото се съдържа в интервала $[a, b]$ и следователно b е негова горна граница. Ако означим с x_0 точната горна граница на M, очевидно $x_0 \leqq b$. Освен

това $x_0 \geqq a$, защото $a \in M$, а x_0 е горна граница на M. Понеже x_0 е от интервала $[a, b]$, можем да образуваме числото $f(x_0)$. Ще докажем, че $f(x_0)=0$. За тази цел ще покажем, че неравенствата $f(x_0)>0$ и $f(x_0)<0$ са невъзможни. Да допуснем например, че $f(x_0)<0$. Оттук следва, че $x_0>a$, защото $f(a)>0$. Нека δ е произволно положително число. Числото $x_0-\delta$ не е горна граница на M, защото x_0 е най-малката му горна граница. Избираме число x_δ от M, за което $x_0-\delta<x_\delta$. Разбира се, $x_\delta \leqq x_0$. Като вземем предвид, че $f(x_0)<0$ и $f(x_\delta)>0$, а също, че f удовлетворява условието на Липшиц в интервала $[a, b]$, получаваме неравенствата

$$0<|f(x_0)|=-f(x_0)<f(x_\delta)-f(x_0)$$
$$=|f(x_\delta)-f(x_0)| \leqq L|x_\delta-x_0| \leqq L\delta,$$

където $L>0$ е константата от условието на Липшиц. Последните съотношения показват, че за всяко положително число δ имаме

$$0<|f(x_0)| \leqq L\delta,$$

което е невъзможно например за $\delta<\frac{|f(x_0)|}{L}$. Полученото противоречие доказва, че неравенството $f(x_0)<0$ е невъзможно. Аналогично се вижда, че и неравенството $f(x_0)>0$ също не е в сила. Следователно $f(x_0)=0$. Последното равенство показва, че $x_0 \in (a, b)$.

Следствие. *Ако f удовлетворява условието на Липшиц във всеки краен затворен подинтервал на интервала $\langle a, b\rangle$, множеството от функционните ѝ стойности е също интервал.*

За да докажем това, достатъчно е да докажем, че ако за някой избор на точките x_1 и x_2 от $\langle a, b\rangle$ имаме $f(x_1) \neq f(x_2)$—например $f(x_1)<f(x_2)$, и ако c е от интервала $(f(x_1), f(x_2))$, то c е също функционна стойност на f, отговаряща на някоя точка x' между x_1 и x_2.

Да означим с φ функцията, дефинирана за всяко x от интервала $[x_1, x_2]$ с равенството

$$\varphi(x)=f(x)-c.$$

Понеже φ удовлетворява заедно с f условието на Липшиц в интервала $[x_1, x_2]$ и има стойности с различни знаци в краищата на този интервал, тя се анулира за някое x' от вътрешността му, т. е.

$$0=\varphi(x')=f(x')-c,$$

или

$$f(x')=c.$$

Теорема 10 и нейното следствие важат и за нормални функции, защото нормалните функции (както доказахме по-горе) са липшицови във всеки краен затворен интервал.

Преди да формулираме следващата теорема, ще припомним някои прости факти, които ще използуваме по-нататък.

Нека f е дефинирана в някой интервал $\langle a, b\rangle$ и нека е строго растяща (или строго намаляваща) в този интервал. Това означава, че ако $x_1<x_2$ и x_1, x_2 са от $\langle a, b\rangle$, то $f(x_1)<f(x_2)$ (или $f(x_1)>f(x_2)$). При горните предположения съответствието, което се установява чрез f между точките от интервала $\langle a, b\rangle$ и множеството M от функционните стойности, е взаимно еднозначно. По-точно казано, това означава, че на всяка точка x от $\langle a, b\rangle$ е съпоставена точка $f(x)$ от M; всяка точка от M е образ на точка от $\langle a, b\rangle$ и на две различни точки x_1, x_2 от $\langle a, b\rangle$ отговарят различни точки $f(x_1)$ и $f(x_2)$ от M. От този факт следва съществуването на единствена функция f^{-1}, дефинирана в M, със стойности в $\langle a, b\rangle$, за която е изпълнено равенството $f^{-1}(f(x))=x$ за всяко x от $\langle a, b\rangle$. Функцията f^{-1} се нарича обратна функция на f. За обратната функция е в сила очевидното тъждество $f(f^{-1}(y))=y$ за всяко y от M.

В сила е следната теорема за обратните функции:

Теорема 11. *Нека f е нормална функция в интервала $\langle a, b\rangle$ и нека производната ѝ f' удовлетворява във всеки краен затворен подинтервал $[p, q]$ на интервала $\langle a, b\rangle$ неравенството*

$$0<m_{pq}\leqq f'(x)$$

(тук m_{pq} е положително число, което изобщо зависи от избора на интервала $[p, q]$). Тогава f е строго растяща в интервала $\langle a, b\rangle$, обратната ѝ функция f^{-1} е също нормална и производната ѝ за всяко допустимо y се дава с равенството

$$(f^{-1}(y))'=\frac{1}{f'(x)},$$

където $x=f^{-1}(y)$.

Доказателство. От неравенството $f'(x)>0$, което очевидно е изпълено в целия интервал $\langle a, b\rangle$, и от следствие 3 на основната теорема за монотонност веднага следва, че f е строго растяща в интервала $\langle a, b\rangle$. Оттук и от казаното по-горе следва, че тя има единствена обратна функция f^{-1}. Съгласно следствието на с. 194 функционните стойности на f също образуват интервал $\langle c, d\rangle$, който е дефиниционна област на f^{-1}. Ще докажем, че f^{-1} е нормална в интервала $\langle c, d\rangle$. За тази цел избираме произволен краен затворен интервал $[m, n]$, който се съдържа в $\langle c, d\rangle$. Ще покажем, че f^{-1} е нормална в него. Понеже m и n са функционни стойности за f, съществуват такива числа k, l от интервала $\langle a, b\rangle$, че $f(k)=m$ и $f(l)=n$. При това, разбира се, f е нормална

в $[k, l]$. Нека y_0 е фиксирано число от интервала $[m, n]$, а y — произволно число от този интервал. С x_0, x означаваме числа от интервала $[k, l]$ (те са определени еднозначно), за които $f(x_0)=y_0$ и $f(x)=y$. Понеже f е нормална в интервала $[k, l]$, то

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+R \quad (|R|\leqq A_{kl}(x-x_0)^2).$$

Другояче написано, това равенство гласи

$$y-y_0=(f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0))f'(x_0)+R \quad (|R|\leqq A_{kl}(x-x_0)^2),$$

или

$$f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)+\frac{1}{f'(x_0)}(y-y_0)+\frac{1}{f'(x_0)}R. \tag{9}$$

Тъй като f' удовлетворява неравенството $0<m_{kl}\leqq f'(x)$ за всяко x от интервала $[k, l]$, от теорема 6 следва, че за всеки избор на числата p и q от този интервал ще е изпълнено неравенството

$$m_{kl}\leqq\frac{f(q)-f(p)}{q-p}.$$

Ако положим $p=x_0$, $q=x$, ще получим неравенството

$$m_{kl}|x-x_0|\leqq|f(x)-f(x_0)|.$$

От последното неравенство заключаваме, че за остатъка $R'=\frac{R}{f'(x_0)}$ в равенство (9) ще са в сила неравенствата

$$|R'|=\frac{R}{|f'(x_0)|}\leqq\frac{A_{kl}}{m_{kl}}(x-x_0)^2\leqq\frac{A_{kl}}{m_{kl}^3}[f(x)-f(x_0)]^2=\frac{A_{kl}}{m_{kl}^3}(y-y_0)^2$$

за всяко x от интервала $[k, l]$, а следователно и за всяко y от интервала $[m, n]$. От (9) заедно с горната оценка на $|R'|$ следва, че f^{-1} е нормална в интервала $[m, n]$ и производната ѝ в точка $y_0=f(x_0)$ е $(f^{-1}(y_0))'=\frac{1}{f'(x_0)}$. Понеже $[m, n]$ е произволно избран краен затворен подинтервал на интервала $\langle c, d\rangle$, то f^{-1} е нормална в $\langle c, d\rangle$ и производната ѝ във всяка точка y от този интервал е $(f^{-1}(y))'=\frac{1}{f'(x)}$, където $x=f^{-1}(y)$. С това теоремата е доказана.

ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

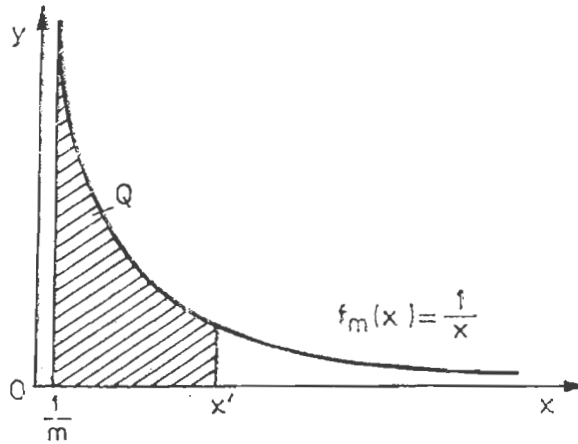
Единствените нормални функции, които познаваме за сега, са полиномите и дробните рационални функции. Оказва се, че всички елементарни функции са нормални в дефиниционните си интервали. Макар че бихме могли да се опитаме да докажем това, изхождайки от свойствата на тези функции, ние ще предпочетем друг път.

Именно развитият по-горе апарат ни дава възможност да направим нещо повече — да дадем строга аналитична дефиниция на всяка елементарна функция, на тази основа да изведем нейните свойства и да докажем, че тя е нормална.

И така в следващото изложение ще дефинираме аналитично функциите $a^x\,(a>0)$, $x^b(x>0)$, $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, а също и някои от обратните кръгови функции.

ДЕФИНИЦИЯ НА ФУНКЦИЯТА $\ln x$

Тук ще дефинираме функцията $\ln x$ за произволни положителни стойности на x. По-подробно казано, ще я построим като нормална функция в интервала $(0, +\infty)$, чиято производна за всяко x от този интервал е $\frac{1}{x}$ и която е нормирана с условието $\ln 1=0$. Ясно е най-напред, че ако такава функция съществува, тя е единствена. Това следва веднага от следствие 1 от основната теорема за монотонност (теорема 5). Наистина, ако φ е произволна нормална функция в интервала $(0, \infty)$, за която $\varphi(1)=0$, и $\varphi'(x)=\frac{1}{x}$ при всяко $x\in(0,+\infty)$, то за функцията $\psi(x)=\ln x-\varphi(x)$ ще имаме $\psi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}=0$ и $\psi(1)=0$, което е достатъчно, за да твърдим, че $\psi(x)\equiv 0$ в $(0, +\infty)$, т. е. че $\varphi(x)=\ln x$.



Черт. 5

За да докажем съществуването на нормална функция в интервала $(0, +\infty)$ с предписаните по-горе свойства, постъпваме по следния (не единствено възможен) начин:

Разглеждаме функцията f_m, дефинирана за всяко x в интервала $[\frac{1}{m}, +\infty)$ (m е естествено число) с равенството

$$f_m(x) = \frac{1}{x}.$$

Веднага се вижда, че f_m е липшицова в интервала $[\frac{1}{m}, \infty)$. Наистина, ако x_1 и x_2 са две точки от този интервал, то

$$|f_m(x_1)-f_m(x_2)| = \left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right| = \frac{|x_2-x_1|}{x_1x_2} \leqq \frac{|x_2-x_1|}{\frac{1}{m^2}} = m^2|x_2-x_1|.$$

Нека x' е произволно число от интервала $[\frac{1}{m}, \infty)$. Разглеждаме множеството от точки Q в равнината, чиито координати (x, y) удовлетворяват неравенствата $\frac{1}{m} \leqq x \leqq x'$, $0 \leqq y \leqq \frac{1}{x}$. На черт. 5 това множество е защриховано. Очевидно е, че Q е фигура, т. е. ограничено точково множество. Означаваме с $F_m(x')$ нейното лице. По този начин е дефинирана една функция F_m в интервала $[\frac{1}{m}, +\infty)$, за която лесно се вижда, че е примитивна на f_m в същия интервал. Наистина нека p, q $(p<q)$ са произволно избрани числа от интервала $[\frac{1}{m}, +\infty)$ и нека μ е такова число, за което е в сила неравенството

$$\mu \leqq f_m(x) = \frac{1}{x}$$

при всяко $x \in [p, q]$. Специално за $x=q$ горното неравенство ни дава

$$\mu \leqq \frac{1}{q}. \tag{10}$$

Ако разгледаме фигурата Q_{pq}, заградена от абсцисната ос, правите, успоредни на ординатната ос и минаващи през точките $(p,0)$ и $(q, 0)$, и графиката на функцията f_m (черт. 6), ясно е, че лицето на тази фигура е $F_m(q)-F_m(p)$*. Тъй като Q_{pq} съдържа

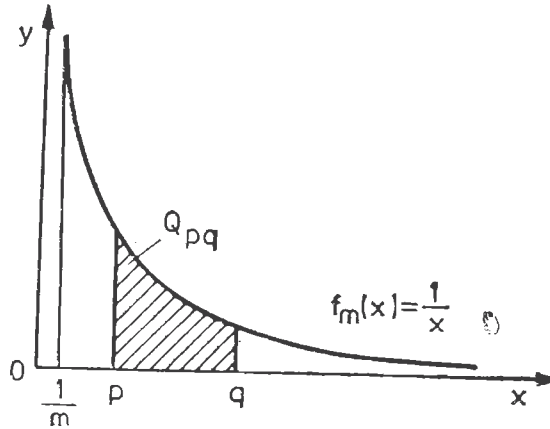
* Понеже лицето на всяка отсечка е нула, лицето на Q_{pq} ще бъде $F_m(q)-F_m(p)$ независимо от това, дали към Q_{pq} ще причислим контурните отсечки, или не.

правоъгълника с основа интервала $[p, q]$ и височина $\frac{1}{q}$, за лицето на Q_{pq} ще имаме неравенството

$$\frac{1}{q}(q-p) \leqq F_m(q) - F_m(p),$$

което заедно с (10) ни дава

$$(11) \qquad \mu \leqq \frac{F_m(q) - F_m(p)}{q-p}.$$



Черт. 6

$$f_m(x) = \frac{1}{x} \leqq \nu.$$

Нека сега ν е такова число, че за всяко $x \in [p, q]$ е изпълнено неравенството

Ако вземем предвид, че $\frac{1}{p} \leqq \nu$, и факта, че Q_{pq} се съдържа в правоъгълника с основа интервала $[p, q]$ и височина $\frac{1}{p}$, ще получим аналогично неравенството

$$(12) \qquad \frac{F_m(q) - F_m(p)}{q-p} \leqq \nu.$$

Тъй като p и q $(p<q)$ са произволно избрани в интервала $\left[\frac{1}{m}, +\infty\right)$, от (11) и (12) следва, че F_m е примитивна на f_m в интервала $\left[\frac{1}{m}, +\infty\right)$. Понеже, от друга страна, f_m е липшицова в интер-

вала $\left[\frac{1}{m}, +\infty\right)$, тя е очевидно липшицова и във всеки негов краен подинтервал и F_m съгласно теорема 7 е нормална в интервала $\left[\frac{1}{m}, +\infty\right)$ и $F'_m(x)=f_m(x)$ за всяко x от този интервал. Ако положим за всяко $x \in \left[\frac{1}{m}, +\infty\right)$

$$\Phi_m(x)=F_m(x)-F_m(1),$$

новата функция Φ_m ще е също нормална, производната ѝ ще бъде $f_m(x)=\frac{1}{x}$ за $x \in \left[\frac{1}{m}, +\infty\right)$ и освен това ще удовлетворява равенството $\Phi_m(1)=0$. Ако дадем на m последователно стойности 2, 3, . . . , ще получим редица от функции

$$\Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_k, \ldots,$$

всяка от които е нормална в своя интервал, има производна $\frac{1}{x}$ за всяко x от този интервал и се анулира при $x=1$. Лесно се вижда, че ако m' и m'' са две различни естествени числа, то $\Phi_{m'}(x)=\Phi_{m''}(x)$ за всяка стойност на x, принадлежаща едновременно на интервалите $\left[\frac{1}{m'}, +\infty\right)$ и $\left[\frac{1}{m''}, +\infty\right)$. Нека за определеност $m'<m''$. Тогава очевидно $\left[\frac{1}{m'}, +\infty\right) \subset \left[\frac{1}{m''}, +\infty\right)$. Ще покажем, че за всяко $x \in \left[\frac{1}{m'}, +\infty\right)$ имаме $\Phi_{m'}(x)=\Phi_{m''}(x)$. Понеже $\Phi_{m'}$ и $\Phi_{m''}$ са нормални в интервала $\left[\frac{1}{m'}, +\infty\right)$ и имат една и съща производна в него, съгласно следствие 2 на с.182 те се различават с константа в този интервал. Но тъй като $\Phi_{m'}(1)-\Phi_{m''}(1)=0$, стойността на тази константа е нула, т. е. за всяко $x \in \left[\frac{1}{m}, +\infty\right)$ имаме $\Phi_{m'}(x)=\Phi_{m''}(x)$. Казаното дотук ни дава възможност да дефинираме за всяко положително число x една функция, която ще наричаме логаритмична. По-точно казано, ако $x>0$, то под $\ln x$ (логаритъм от x) ще разбираме числото

$$\ln x=\Phi_m(x),$$

където m е произволно естествено число, за което $x>\frac{1}{m}$. Сега ще изследваме свойствата на логаритмичната функция. Най-напред ясно е, че числото $\ln x$ е еднозначно определено при дадено $x>0$, защото, както видяхме по-горе, за всеки две естествени

числа m' и m'', за които $x \in \left[\frac{1}{m'}, +\infty\right)$ и $x \in \left[\frac{1}{m''}, +\infty\right)$, е в сила равенството $\Phi_{m'}(x) = \Phi_{m''}(x)$. Също така е ясно, че $\ln x$ е нормална функция в интервала $(0, \infty)$. За да проверим това, достатъчно е да проверим, че $\ln x$ е нормална в произволен краен затворен подинтервал $[a, b]$ на интервала $(0, \infty)$. Наистина, ако $[a, b]$ е такъв подинтервал, то $a > 0$ и ако изберем естественото число m достатъчно голямо, ще имаме включването $[a, b] \subset \left[\frac{1}{m}, +\infty\right)$. Обаче за всяко x от интервала $\left[\frac{1}{m}, +\infty\right)$ имаме $\ln x = \Phi_m(x)$, т. е $\ln x$ е нормална в интервала $\left[\frac{1}{m}, \infty\right)$, а следователно е нормална и в по-малкия интервал $[a, b]$. Оттук следва, че логаритмичната функция е нормална в интервала $(0, \infty)$. Тя е строго растяща функция, защото производната ѝ е положителна в този интервал. По-точно казано, ако $0 < x' < x''$, то за достатъчно голяма стойност на естественото число m ще имаме $\frac{1}{m} < x' < x''$. Тъй като за всяко x от интервала $[p, q]$ $(0 < p < q)$ са в сила съотношенията

$$(13) \qquad (\ln x)' = \Phi'_m(x) = f_m(x) \geqq \frac{1}{q},$$

съгласно теорема 11 $\ln x$ е строго растяща в интервала $\left[\frac{1}{m}, +\infty\right)$, така че $\ln x' < \ln x''$. Накрая ще отбележим, че $\ln 1 = 0$, а $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

Тук ще докажем следното основно свойство на логаритмичната функция: За всеки две положителни числа x_1 и x_2 е в сила равенството

$$(14) \qquad \ln(x_1 . x_2) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

За да докажем (14), разглеждаме нормалната функция φ, дефинирана за всяко положително x чрез равенството

$$\varphi(x) = \ln(x_1 x) - \ln x_1 - \ln x.$$

Имаме $\varphi'(x) = \frac{x_1}{x_1 . x} - \frac{1}{x} = 0$. Оттук и от следствие 1 на с. 182 следва, че φ е константа. Но $\varphi(1) = \ln x_1 - \ln x_1 = 0$ и следователно $\varphi(x) = 0$ за всяко положително x. За да получим (14), остава да положим $x = x_2$. От (14) с индукция следва равенството

$$\ln(x_1 . x_2 \ . \ . \ . \ x_n) = \ln x_1 + \ln x_2 + \ . \ . \ . \ + \ln x_n$$

за произволни положителни стойности на $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Специално, ако $x_i = a > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ то

$$\ln a^n = n \ln a.$$

Освен това имаме $0 = \ln 1 = \ln \frac{x}{x} = \ln(x \cdot \frac{1}{x}) = \ln x + \ln \frac{1}{x}$, откъдето получаваме, че $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$. По общо за $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ е в сила равенството

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2.$$

Наистина $\ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 + \ln \frac{1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2$.

Лесно се вижда, че функционните стойности на логаритмичната функция запълват интервала $(-\infty, +\infty)$. Че функционните стойности образуват интервал, се вижда от следствието на с. 194 и от факта, че логаритмичната функция е нормална и следователно липшицова във всеки краен затворен интервал от дефиниционната си област. Остава да покажем, че този интервал е $(-\infty, +\infty)$. За тази цел достатъчно е да докажем, че логаритмичната функция има произволно големи по абсолютна стойност както положителни, така и отрицателни стойности. За да докажем това, означаваме с a произволно число, по-голямо от единица. Тогава $\ln a > \ln 1 = 0$, а $\ln a^n = n \ln a$ и $\ln \frac{1}{a^n} = -n \ln a$. Ясно е, че за достатъчно големи стойности на n числото $n \ln a$ ще бъде по-голямо от произволно избрано положително число, а числото $-n \ln a$ ще бъде по-малко от произволно избрано отрицателно число. С това е доказано, че функционните стойности на логаритмичната функция запълват интервала $(-\infty, +\infty)$.

ДЕФИНИЦИЯ НА ФУНКЦИЯТА e^x ЗА ПРОИЗВОЛНИ СТОЙНОСТИ НА x

Видяхме, че логаритмичната функция е нормална в интервала $(0, +\infty)$ и функционните ѝ стойности запълват интервала $(-\infty, +\infty)$. Понеже (както следва от (13)) производната ѝ е положителна в интервала $(0, +\infty)$, съгласно следствие 3 от основната теорема за монотонност (теорема 5) тя е строго растяща в интервала $(0, +\infty)$ и има единствена обратна функция, дефинирана в интервала $(-\infty, +\infty)$, със стойности, изпълващи интервала $(0, +\infty)$. Тя е също строго растяща и нормална в дефини-

ционния си интервал. Тази обратна функция ще наричаме експоненциална функция и ще бележим така: e^x. От дефиницията на експоненциалната функция като обратна на логаритмичната функция следват равенствата

(15) $\ln(e^x)=x$ за $x\in(-\infty, +\infty)$

и

(16) $e^{\ln y}=y$ за $y\in(0, +\infty)$.

За производната й получаваме за всяко $x_0\in(-\infty, +\infty)$ и $y_0=e^{x_0}$

$$(e^{x_0})'=\frac{1}{(\ln y_0)'}=\frac{1}{\frac{1}{y_0}}=e^{x_0}.$$

От равенство (16) при $y=1$ се вижда, че $e^0=1$.

Нека сега x_1 и x_2 са произволни числа. Имаме равенствата

$$\ln(e^{x_1}.e^{x_2})=\ln(e^{x_1})+\ln(e^{x_2})=x_1+x_2=\ln(e^{x_1+x_2}).$$

Понеже логаритмичната функция е строго растяща, тя не може да има равни стойности за различни стойности на аргумента. Оттук и от равенството $\ln(e^{x_1}e^{x_2})=\ln(e^{x_1+x_2})$ следва, че

$$e^{x_1+x_2}=e^{x_1}.e^{x_2}.$$

Горното равенство изразява едно основно свойство на експоненциалната функция. С помощта на математическата индукция веднага се вижда, че за всеки n числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е в сила равенството

$$e^{x_1+x_2+\ldots+x_n}=e^{x_1}.e^{x_2}\ldots e^{x_n}.$$

Очевидно $e^{-x}=\frac{1}{e^x}$, защото $1=e^0=e^{x-x}=e^x.e^{-x}$. Лесно се вижда, че ако p и q са произволни естествени числа, то $e^{\frac{p}{q}}=(e^1)^{\frac{p}{q}}$ (тук под $(a)^r$, където r е рационално число, а $a>0$, разбираме r-тата степен на числото a). Наистина, от една страна, $e^1=e^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\ldots+\frac{1}{q}}=$ $=e^{\frac{1}{q}}.e^{\frac{1}{q}}\ldots e^{\frac{1}{q}}=(e^{\frac{1}{q}})^q$ и следователно $e^{\frac{1}{q}}=(e^1)^{\frac{1}{q}}$

От друга страна, $e^{\frac{p}{q}}=e^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}+\ldots+\frac{1}{q}}=\left(e^{\frac{1}{q}}\right)^p=\left[\left(e^1\right)^{\frac{1}{q}}\right]^p$ $=(e^1)^{\frac{p}{q}}$. Също така $e^{-\frac{p}{q}}=\frac{1}{e^{\frac{p}{q}}}=\frac{1}{\left(e^1\right)^{\frac{p}{q}}}=(e^1)^{-\frac{p}{q}}$ и $e^0=1=(e^1)^0$. И

тъй, ако r е произволно рационално число, то $e^r = (e^1)^r$, което ни дава основание да разглеждаме дефинираната по-горе за всички реални x функция e^x като продължение на показателната функция $(e^1)^r$. Накрая ще добавим, че числото e^1 е прието да се бележи с буквата e и има приблизителна стойност 2,71828182845 . . .

Ще отбележим още, че експоненциалната функция е единствената нормална функция, дефинирана в интервала $(-\infty, +\infty)$, която е равна на своята производна и има стойност 1 за $x=0$. Наистина нека φ е нормална функция в интервала $(-\infty, +\infty)$, която удовлетворява равенството $\varphi(x)=\varphi'(x)$ за всяко x и за която $\varphi(0)=1$. Разглеждаме функцията ψ, дефинирана за всяко x с равенството $\psi(x)=\frac{\varphi(x)}{e^x}$. От теоремата за производна на частно (теорема 3) се вижда, че ψ е нормална в интервала $(-\infty, +\infty)$, защото е отношение на нормални функции, при което функцията в знаменателя e^x е ограничена отдолу с подходящо положително число във всеки краен затворен интервал. За производната на ψ имаме

$$\psi'(x)=\frac{\varphi'(x)e^x-e^x\varphi(x)}{(e^x)^2}=0,$$

т. е. ψ е константа. Но тъй като $\psi(1)=1$, то $\psi(x)=\frac{\varphi(x)}{e^x}=1$ за всяко x, откъдето следва, че за такива x ще имаме $\varphi(x)=e^x$. С това е доказана единствеността на експоненциалната функция.

ДЕФИНИЦИЯ НА ПОКАЗАТЕЛНАТА ФУНКЦИЯ a^x $(a>0)$ ЗА ПРОИЗВОЛНИ СТОЙНОСТИ НА x

Нека $a>0$. За определеност ще считаме, че $a>1$. За всяко x дефинираме функцията a^x с равенството

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Така дефинираната функция наричаме показателна функция.

Свойствата на показателната функция се установяват лесно, като се използват свойствата на експоненциалната и логаритмичната функция. Най-напред от дефиницията на показателната функция се вижда, че тя е нормална в интервала $(-\infty, +\infty)$. За да докажем това, ще отбележим, че ако $[p, q]$ е произволен краен затворен интервал, линейната функция $x \ln a$ е нормална в него. Понеже експоненциалната функция e^u е нормална в

крайния затворен интервал $[p\ln a, q\ln a]$, съгласно теоремата за диференциране на съставни (сложни) функции (теорема 4) показателната функция е нормална в крайния затворен интервал $[p, q]$. Тъй като този интервал е произволно избран, то a^x е нормална в целия интервал $(-\infty, +\infty)$. Съгласно правилото за намиране на производна на сложна функция за всяко x имаме

$$(a^x)' = e^{x\ln a} . \ln a = a^x \ln a.$$

Понеже $a>1$, то $\ln a > \ln 1$ и следователно производната на показателната функция е положителна за всяко x, а самата функция е строго растяща. Това може да се изведе и директно от дефиницията ѝ. Наистина, ако $x_1<x_2$, то $x_1\ln a<x_2\ln a$ и следователно $a^{x_1}=e^{x_1\ln a}<e^{x_2\ln a}=a^{x_2}$.

Лесно се доказва, че за всеки избор на числата x_1 и x_2 имаме

$$a^{x_1+x_2} = a^{x_1} . a^{x_2}.$$

Наистина $a^{x_1+x_2} = e^{(x_1+x_2)\ln a} = e^{x_1\ln a+x_2\ln a} = e^{x_1\ln a} . e^{x_2\ln a} = a^{x_1} . a^{x_2}$. Също тъй имаме $a^0=e^{0\ln x}=e^0=1$. Очевидно е освен това, че $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$. защото $1=a^0=a^{x-x}=a^x . a^{-x}$.

По-рано предположихме за определеност, че $a>1$. Случаят, когато $0<a<1$, се разглежда аналогично. Ще отбележим само, че в този случай, понеже $\ln a<0$, показателната функция ще бъде намаляваща. Случаят, когато $a=1$, не е интересен, защото е тривиален. Наистина тогава $\ln a=\ln 1=0$ и следователно $a^x = 1^x = e^{x\ln 1} = e^0 = 1$.

Накрая ще докажем, че за всеки две стойности x_1 и x_2 на променливата x ще имаме

$$a^{x_1x_2}=(a^{x_1})^{x_2}. \tag{17}$$

Най-напред ще отбележим, че за всяко x е в сила равенството

$$\ln(a^x) = x \ln a.$$

Наистина $\ln(a^x)=\ln(e^{x\ln a})=x\ln a$. Но тогава $(a^{x_1})^{x_2}=e^{x_2\ln(a^{x_1})}=e^{x_1x_2\ln a} = a^{x_1x_2}$, с което (17) е доказано.

ИЗСЛЕДВАНЕ НА СТЕПЕННАТА ФУНКЦИЯ x^b ЗА ПОЛОЖИТЕЛНИ СТОЙНОСТИ НА x И ПРОИЗВОЛНИ СТОЙНОСТИ НА b

Нека b е произволно число. За всяка положителна стойност на x имаме

$$x^b = e^{b \ln x}.$$

Тази функция наричаме *степенна функция*. От начина, по който дефинирахме степенната функция, се вижда, че тя е растяща при $b>0$, намаляваща при $b<0$ и е константата единица при $b=0$. Също така е ясно, че степенната функция е нормална. Доказателството е същото като доказателството за нормалност на показателната функция, поради което го предоставяме на читателя. Множеството от функционните стойности на степенната функция съвпада с интервала $(0, +\infty)$, ако $b \neq 0$. Това следва от факта, че когато x пробягва интервала $(0, +\infty)$, $b \ln x$ пробягва интервала $(-\infty, +\infty)$ и следователно $e^{b \ln x}$ пробягва интервала $(0, +\infty)$.

Във всяка точка $x>0$ можем да намерим производната на степенната функция като производна на сложна функция на две нормални функции. Имаме

$$(x^b)' = (e^{b \ln x})' = e^{b \ln x} \frac{b}{x} = b \frac{e^{b \ln x}}{e^{\ln x}} = b e^{(b-1) \ln x} = b x^{b-1}.$$

Не е трудно да се види, че ако b е естествено число, то x^b е произведение на b множителя, всеки от които е равен на x.

Наистина в този случай

$$x^b = e^{b \ln x} = e^{\ln x + \ln x + \ldots + \ln x} = e^{\ln x} . e^{\ln x} \ldots e^{\ln x}$$

$$= x . x . \ldots x.$$

Разбира се, при степенната функция са в сила равенствата

$$x^b . x^c = x^{b+c}.$$

В следващото изложение ще се спрем на дефиницията на друга група функции, а именно на тригонометричните функции и на техните обратни функции. Най-напред ще дефинираме функцията $\operatorname{arc\,tg} x$.

ДЕФИНИЦИЯ НА ФУНКЦИЯТА $\operatorname{arc\,tg} x$ ЗА ПРОИЗВОЛНИ СТОЙНОСТИ НА x

Да разгледаме функцията f, дефинирана за всички стойности на x с равенството

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Тя е нормална в интервала $(-\infty, +\infty)$, защото е отношение на нормални функции, при което знаменателят удовлетворява неравенствата $1+x^2 \geqq 1$. От нормалността следва, че f удовлетворява условието на Липшиц във всеки краен затворен интервал. Директно се вижда обаче, че тя удовлетворява това условие в целия интервал $(-\infty, +\infty)$. Това следва веднага от равенството

$$|f(x_2)-f(x_1)|=\left|\frac{1}{1+x_2^2}-\frac{1}{1+x_1^2}\right|=\frac{|x_1+x_2|}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)}|x_1-x_2|$$

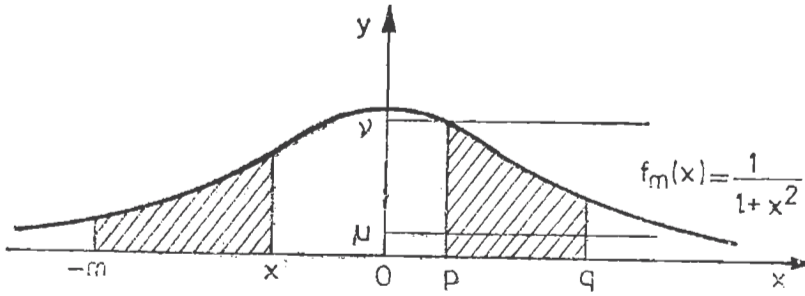
и от неравенствата (при предположение, че $|x_2| \geqq |x_1|$, което можем да допуснем без ограничение на общността)

$$\frac{|x_1+x_2|}{(1+x_2^2)(1+x_1^2)} \leqq \frac{|x_1|+|x_2|}{1+x_2^2} \leqq \frac{2|x_2|}{1+x_2^2} \leqq 1.$$

Нека сега m е естествено число, а $x \geqq -m$ е произволно число. Означаваме с F_m лицето на фигурата, заградена от абсцисната ос, правите, успоредни на ординатната ос и минаващи през точките $(-m, 0)$ и $(x, 0)$, и графиката на функцията (вж. черт. 7). Получената по този начин функция F_m е дефинирана за всяко $x \geqq m$. Ще покажем, че тя е примитивна на f в този интервал. За тази цел означаваме с p и q $(p<q)$ произволно избрани числа от интервала $[-m, +\infty)$. Нека μ (ν) е число, за което е изпълнено неравенството

$$\mu \leqq f(x)=\frac{1}{1+x^2} \qquad \left(f(x)=\frac{1}{1+x^2} \leqq \nu\right) \tag{18}$$

за всяко $x \in [p, q]$. Означаваме с Q_{pq} фигурата, заградена от абсцисната ос, правите, успоредни на ординатната ос, минаващи през точките $(p, 0)$, $(q, 0)$ и графиката на функцията f (на черт. 7 Q_{pq} е защрихована). Лицето на фигурата Q_{pq} очевидно е $F_m(q)$



Черт. 7

$-F_m(p)$. От друга страна, от неравенството (18) следва, че ако $\mu \geqq 0$, то Q_{pq} включва в себе си правоъгълника с основа интервала $[p, q]$ и височина μ, поради което

(19) $$\mu(q-p) \leqq F_m(q)-F_m(p).$$

Ако $\mu < 0$, неравенство (19) е автоматично изпълнено. Тъй като Q_{pq} се съдържа в правоъгълника с основа интервала $[p, q]$ и височина ν (очевидно $\nu > 0$), то

(20) $$F_m(q)-F_m(p) \leqq \nu(q-p).$$

От произволния избор на числата p, q $(p<q)$ в интервала $[-m, +\infty)$, от (19) и (20) следва, че F_m е примитивна на f в този интервал. Оттук и от теорема 7 следва, че F_m е нормална в $[-m +\infty)$, а производната ѝ за всяко $x \geqq -m$ е

$$F'_m(x)=f(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Дефинираме функцията Φ_m за всяко $x \geqq -m$ с равенството

$$\Phi_m(x)=F_m(x)-F_m(0).$$

Лесно се вижда, че ако m' и m'' са естествени числа и $x \geqq \max(-m', -m'')$, то $\Phi_{m'}(x)=\Phi_{m''}(x)$. Нека за определеност имаме $m''>m'$. Тогава $\max(-m', -m'')=-m'$. Нека $x \geqq -m'$. Понеже $\Phi_{m'}$ и $\Phi_{m''}$ имат едни и същи производни в интервала $[-m', +\infty)$, те се различават с константа в него. Но $\Phi_{m'}(0)=\Phi_{m''}(0)=0$, откъдето следва, че стойността на тази константа е нула, т. е. $\Phi_{m'}(x)=\Phi_{m''}(x)$ за всяко $x \in [-m', +\infty)$. Като имаме предвид казаното дотук, можем да дефинираме функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ за всяка стойност на x по следния начин: Ако x е произволно число, означаваме с m кое да е естествено число, за което $x \geqq -m$, и полагаме

$$\operatorname{arc\,tg} x = \Phi_m(x).$$

Тъй като $\Phi_{m'}(x)=\Phi_{m''}(x)$ за всички естествени числа m', m'', за които $x \geqq \max(-m', -m'')$, дефиницията на $\operatorname{arc\,tg} x$ е еднозначна. От дефиницията също така веднага следва, че $\operatorname{arc\,tg} x$ е нормална функция в интервала $(-\infty, +\infty)$ и че производната ѝ е

$$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

за всяко x. Също така очевидно е, че $\operatorname{arc\,tg} 0=0$. Сега ще покажем, че функционните стойности на $\operatorname{arc\,tg} x$ описват краен отворен интервал от ординатната ос, който е симетричен относно началото. За тази цел най-напред ще докажем, че $\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x$, т. е. че $\operatorname{arc\,tg} x$ е нечетна функция. Наистина, ако означим с φ функцията, дефинирана за всяко x с равенството

$$\varphi(x) = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg}(-x),$$

то $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$ за всяко x, така че φ е константа. Но $\varphi(0)=0$, следователно за всяко x имаме $0=\varphi(x)=\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}(-x)$ или $\operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,tg}(-x)$. Оттук и от нормалността на $\operatorname{arctg} x$ следва, че множеството от функционните стойности е интервал, симетричен относно началото. Ще покажем, че този интервал е краен. За тази цел ще докажем, че за всяко естествено число n имаме $\operatorname{arc\,tg} n < \frac{5}{2}$. Наистина, ако k е естествено число и $x \in [k-1, k]$, в сила е неравенството $\frac{1}{1+x^2} \leqq \frac{1}{1+(k-1)^2}$. Понеже $\operatorname{arc\,tg} x$ е примитивна функция на $\frac{1}{1+x^2}$, ще бъде в сила

неравенството $\operatorname{arc\,tg} k - \operatorname{arc\,tg}(k-1) \leqq \frac{1}{1+(k-1)^2}[k-(k-1)]$ $= \frac{1}{1+(k-1)^2}$. Ако в последното неравенство дадем на k последователно стойностите 1, 2, . . ., n, ще получим неравенствата

$$\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 \leqq 1,$$

$$\operatorname{arc\,tg} 2 - \operatorname{arc\,tg} 1 \leqq \frac{1}{1+1^2},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\operatorname{arc\,tg} n - \operatorname{arc\,tg}(n-1) \leqq \frac{1}{1+(n-1)^2}.$$

Чрез почленно събиране на горните неравенства за $n>1$ получаваме оценките

$$\operatorname{arc\,tg} n \leqq 1 + \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \ldots + \frac{1}{1+(n-1)^2} < \frac{3}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$$

$$+ \ldots + \frac{1}{(n-1)^2} < \frac{3}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} = \frac{3}{2}$$

$$+1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} = \frac{5}{2} - \frac{1}{n-1} < \frac{5}{2}.$$

Тъй като $\operatorname{arc\,tg} n < \frac{5}{2}$ за всяко естествено число n, то и за всяко x ще имаме $\operatorname{arc\,tg} x < \frac{5}{2}$. Наистина, ако изберем n така, че $x<n$, то от факта, че функцията е строго растяща, следва $\operatorname{arc\,tg} x < \operatorname{arc\,tg} n < \frac{5}{2}$. Разбира се, ще бъде в сила и неравенството $\operatorname{arc\,tg} x > -\frac{5}{2}$ за всяко x, защото, както отбелязахме по-горе, интервалът, който функционните стойности на $\operatorname{arc\,tg} x$ запълват, е симетричен относно началото. Накрая ще отбележим, че въпросният интервал е отворен. Това следва от факта, че $\operatorname{arc\,tg} x$ е строго растяща функция, която няма нито най-голяма стойност, нито най-малка стойност. Наистина за всяка функционна стойност, отговаряща на някое x', можем да изберем x_1 и x_2 така, че $x_1 < x' < x_2$ и тогава $\operatorname{arc\,tg} x_1 < \operatorname{arc\,tg} x' < \operatorname{arc\,tg} x_2$.

Означаваме с $\frac{\pi}{2}$ точната долна граница на множеството от положителните числа, които не принадлежат на интервала, съдържащ функционните стойности на $\operatorname{arc\,tg} x$. Ясно е, че 0

$<\frac{\pi}{2}\leqq\frac{5}{2}$. От дефиницията на $\frac{\pi}{2}$ се вижда, че $\frac{\pi}{2}$ е десен край на този интервал. Тогава самият интервал ще бъде $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Пресмятането на π ще отложим за по-късно.

Забележка. Ограничеността на $\operatorname{arc\,tg} x$ може да се докаже още така: Разглеждаме функцията $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ за стойности на x от интервала $(0, +\infty)$. Тъй като производната ѝ е нула, тя е константа в този интервал и $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}=2\operatorname{arc\,tg} 1$. Понеже $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}>0$ в интервала $(0, +\infty)$, то $0<\operatorname{arc\,tg} x<2\operatorname{arc\,tg} 1$. От нечетността на $\operatorname{arc\,tg} x$ следва, че $\operatorname{arc\,tg} x>-2\operatorname{arc\,tg} 1$ за $x\in(-\infty, 0)$, откъдето веднага следва ограничеността на $\operatorname{arc\,tg} x$ в целия интервал $(-\infty, +\infty)$.

ДЕФИНИЦИЯ НА ФУНКЦИЯТА $\operatorname{tg} x$ В ИНТЕРВАЛА $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Както видяхме от предишната точка, функцията $\operatorname{arc\,tg} x$ е строго растяща и нормална в интервала $(-\infty, +\infty)$, а функционните ѝ стойности описват интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ако $[p, q]$ е произволен краен затворен интервал, за всяко x от $[p, q]$ са в сила съотношенията

$$(\operatorname{arc\,tg} x)'=\frac{1}{1+x^2}\geqq\min\left(\frac{1}{1+p^2}, \frac{1}{1+q^2}\right)>0.$$

Оттук и от теорема 12 следва, че обратната функция f^{-1} е нормална и строго растяща в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и функционните ѝ стойности описват интервала $(-\infty, +\infty)$. Освен това за всяко $y\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ имаме

$$(f^{-1}(y))'=\frac{1}{(\operatorname{arc\,tg} x)'}=1+x^2=1+(f^{-1}(y))^2.$$

Тук $y=f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$ и следователно $x=f^{-1}(y)$. Обратната функция ще бележим с $\operatorname{tg} y$. И тъй $\operatorname{tg} y$ е дефинирана в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в същия интервал е нормална, строго растяща и

функционните ѝ стойности описват интервала $(-\infty, +\infty)$, а производната ѝ за всяко $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ се дава с равенството

$$(\operatorname{tg} y)' = 1 + \operatorname{tg}^2 y.$$

Не е трудно да се докаже, че $\operatorname{tg} y$ е нечетна функция. Наистина от свойствата на обратните функции при произволно $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $x = \operatorname{tg} y$ (следователно $y = \operatorname{arctg} x$) имаме равенствата

$$\operatorname{tg}(-y) = \operatorname{tg}(-\operatorname{arc\,tg} x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}(-x)) = -x = -\operatorname{tg} y.$$

Ако дадем на y стойност нула, от последното равенство получаваме, че $\operatorname{tg} 0 = 0$. Ясно е също, че $\operatorname{tg} y < 0$ за $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ и $\operatorname{tg} y > 0$ за $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

ДЕФИНИЦИЯ НА ФУНКЦИИТЕ $\sin x$ И $\cos x$ ЗА ВСИЧКИ СТОЙНОСТИ НА x

Най-напред ще дефинираме две редици от функции, с чиято помощ ще дефинираме $\sin x$ и $\cos x$ за всички стойности на x. Полагаме най-напред за всяко x от интервала $\Delta_1 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$s_1(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}, \qquad c_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}.$$

Ако за естествено число m са дефинирани функциите s_m, c_m в интервала $\Delta_m = (-2^{m-2}\pi, 2^{m-2}\pi)$, функциите s_{m+1}, c_{m+1} дефинираме в по-големия интервал $\Delta_{m+1} = (-2^{m-1}\pi, 2^{m-1}\pi)$ с помощта на равенствата

$$s_{m+1} = 2 s_m\left(\frac{x}{2}\right) c_m\left(\frac{x}{2}\right), \qquad c_{m+1}(x) = c_m^2\left(\frac{x}{2}\right) - s_m^2\left(\frac{x}{2}\right). \tag{21}$$

По този начин са дефинирани индуктивно функциите s_m и c_m в интервала Δ_m при всяко естествено m. Ще докажем някои свойства на тези функции, които ще използуваме по-нататък.

Най-напред ще докажем, че всяка от функциите s_m и c_m е нормална в дефиниционния си интервал $\Delta_m (m = 1, 2, \ldots)$. За тази цел ще отбележим, че ако x пробягва някой краен затворен подинтервал $[a, b]$ на интервала Δ_1, то стойностите на $\operatorname{tg} x$ ще пробягат интервала $[\operatorname{tg} a, \operatorname{tg} b]$, който е също краен и затворен. Това следва от факта, че $\operatorname{tg} x$ е нормална функция, която е растяща в $[a, b]$. Но тогава за такива x и функцията $g(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ ще приема стойности в някакъв краен затворен интервал $[p, q]$ $(p \geqq 1)$. Освен това очевидно g е нормална в интервала Δ_1

$=\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тъй като е сума на нормалните функции 1 и $\mathrm{tg}^2 x$.

От друга страна, степенната функция $f(u)=u^{\frac{1}{2}}=\sqrt{u}$ е нормална в интервала $(0, +\infty)$. Оттук и от теоремата за диференциране на съставни функции (теорема 4) следва нормалността на сложната функция $\varphi(x)=f(g(x))=\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}$ в интервала Δ_1. Но тогава и функциите $s_1(x)=\frac{\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$ и $c_1(x)=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}}$ ще са нормални в същия интервал като частни на нормални функции (при което $\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}\geqq 1$).

Ако за някое естествено число m функциите s_m и c_m са нормални в интервала $\Delta_m=(-2^{m-2}\pi, 2^{m-2}\pi)$, то s_{m+1}, c_{m+1} са нормални в интервала $\Delta_{m+1}=(-2^{m-1}\pi, 2^{m-1}\pi)$. Това следва от равенствата (21), които са в сила за всяко $x\in\Delta_{m+1}$, както и от нормалността на сложните функции $s_m\left(\frac{x}{2}\right)$ и $c_m\left(\frac{x}{2}\right)$ в този интервал. Така индуктивно е доказана нормалността на всяка от функциите s_m, c_m в интервала Δ_m $(m=1, 2, \ldots)$.

Преди да продължим с изучаването на свойствата на дефинираните по-горе функции, ще докажем една лема, която ще използуваме по-нататък.

Лема. *Нека в интервала $\langle a, b\rangle$ са дефинирани четири нормални функции s, c, σ, ζ. Ако те удовлетворяват равенствата*

$$s'(x)=c(x),\ c'(x)=-s(x),\ \sigma'(x)=\zeta(x), \zeta'(x)=-\sigma(x)$$

за всяко x от $\langle a, b\rangle$, а за някое x_0 от същия интервал имаме $s(x_0)=\sigma(x_0)$, $c(x_0)=\zeta(x_0)$, то за всяко $x\in\langle a, b\rangle$ са в сила равенствата

$$s(x)=\sigma(x),\ c(x)=\zeta(x).$$

Доказателство. Разглеждаме функцията, дефинирана в $\langle a, b\rangle$ с равенството

$$\varphi(x)=[s(x)-\sigma(x)]^2+[c(x)-\zeta(x)]^2,$$

която е очевидно нормална в интервала $\langle a, b\rangle$. За нейната производна е в сила тъждеството

$$\varphi'(x)=2[s(x)-\sigma(x)][c(x)-\zeta(x)]+2[c(x)-\zeta(x)][-s(x)+\sigma(x)]=0,$$

откъдето следва, че φ е константа в интервала $\langle a, b\rangle$. Но $\varphi(x_0)=0$, следователно за всяко $x \in \langle a, b\rangle$ имаме $\varphi(x)=0$, т. е. $s(x)=\sigma(x)$, $c(x)=\zeta(x)$.

Ще използуваме горната лема, за да докажем, че при всяко естествено число m са изпълнени равенствата $s_m(x)=s_{m+1}(x)$ и $c_m(x)=c_{m+1}(x)$ за всяко x от интервала $\Delta_m=(-2^{m-2}\pi,\ 2^{m-2}\pi)$.

За да докажем това, достатъчно е да покажем, че при всяко естествено число m са в сила равенствата $s'_m(x)=c_m(x)$, $c'_m(x)=-s_m(x)$ за всяко x от интервала Δ_m, както и равенствата $s_m(0)=0$, $c_m(0)=1$, и да приложим горната лема за функциите s_m, c_m, s_{m+1} и c_{m+1}. Доказателството ще извършим индуктивно.

Понеже $\operatorname{tg} 0=0$, ясно е, че $s_1(0)=0$ и $c_1(0)=1$. Освен това, ако $s_m(0)=0$ и $c_m(0)=1$, от дефиниционните равенства (21) за s_{m+1} и c_{m+1} е ясно, че $s_{m+1}(0)=0$ и $c_{m+1}(0)=1$. Така се убеждаваме индуктивно, че $s_m(0)=0$ и $c_m(0)=1$ за всяко естествено число m.

Сега ще покажем, че при всяко естествено m са в сила равенствата

$$s'_m(x)=c_m(x),\quad c'_m(x)=-s_m(x)\quad (x \in \Delta_m). \tag{22}$$

Наистина при $m=1$ имаме

$$s'_1(x)=\frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}-\dfrac{2\operatorname{tg} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)\operatorname{tg} x}{2\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

$$=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}-\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=c_1(x),$$

$$c'_1(x)=\left[(1+\operatorname{tg}^2 x)^{-\frac{1}{2}}\right]'$$

$$=-\frac{1}{2}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2\operatorname{tg} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)$$

$$=-\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}=-s_1(x).$$

Ако за някое естествено число m имаме $s'_m(x)=c_m(x)$ и $c'_m(x)=-s_m(x)$ за всяко $x \in \Delta_m$, същите равенства са в сила и за s_{m+1} и c_{m+1} за всяко $x \in \Delta_{m+1}$. Това следва от равенствата

$$s'_{m+1}(x)=\left[2s_m\left(\frac{x}{2}\right)c_m\left(\frac{x}{2}\right)\right]'=2c_m\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}c_m\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$-2s_m\left(\frac{x}{2}\right)s_m\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}=c_m^2\left(\frac{x}{2}\right)-s_m^2\left(\frac{x}{2}\right)=c_{m+1}(x),$$

$$c'_{m+1}(x)=\left[c_m^2\left(\frac{x}{2}\right)-s_m^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]'=-2c_m\left(\frac{x}{2}\right)s_m\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}$$

$$-2s_m\left(\frac{x}{2}\right)c_m\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}=-2s_m\left(\frac{x}{2}\right)c_m\left(\frac{x}{2}\right)=-s_{m+1}(x).$$

Така индуктивно е доказано, че за всяко естествено число m и за всяко $x\in\Delta_m$ са в сила равенствата

$$s_m(x)=s_{m+1}(x),\ c_m(x)=c_{m+1}(x).$$

По-общо, като приложим p пъти горните равенства, заключаваме, че за всяко такова x (т. е. $x\in\Delta_m$) са в сила равенствата

(23) $$s_m(x)=s_{m+p}(x),\ c_m(x)=c_{m+p}(x).$$

След горните предварителни бележки ще дефинираме функциите $\sin x$ и $\cos x$.

Ако x е произволно число, избираме естественото число m толкова голямо, че $x\in\Delta_m=(-2^{m-2}\pi,\ 2^{m-2}\pi)$, и полагаме

(24) $$\sin x=s_m(x),\ \cos x=c_m(x).$$

Дефиницията на $\sin x$ и $\cos x$ е еднозначна, т. е. не зависи от m — това следва веднага от равенствата (23). Също така веднага се вижда, че $\sin x$ и $\cos x$ са нормални в интервала $(-\infty, +\infty)$. За да покажем това, избираме произволен краен затворен интервал $[p, q]$ и естественото число m толкова голямо, че да бъде в сила включването $[p, q]\subset\Delta_m$. Понеже за всяко такова m и за всяко $x\in\Delta_m$ функциите $\sin x$ и $\cos x$ се задават с равенствата (24), а функциите s_m и c_m са нормални в своя дефиниционен интервал Δ_m, те са нормални и в по-малкия интервал $[p, q]$. Понеже интервалът $[p, q]$ е произволно избран, то $\sin x$ и $\cos x$ са нормални в интервала $(-\infty, +\infty)$.

От нормалността на $\sin x$ и $\cos x$ и от дефиниционните им равенства (24) следва непосредствено, че за всяко x ще имам

(25) $$(\sin x)'=\cos x,\ (\cos x)'=-\sin x,\ \sin 0=0,\ \cos 0=1.$$

Лемата на с. 212 показва, че функциите $\sin x$ и $\cos x$ са единствените нормални функции, дефинирани в интервала $(-\infty, +\infty)$, които удовлетворяват равенствата (25).

Сега ще докажем, че за всички стойности на x е в сила равенството

(26) $$\sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Наистина, ако положим $\varphi(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$, от една страна, имаме $\varphi'(x)=2\sin x\cos x-2\sin x\cos x=0$. От друга страна, $\varphi\ 0)=1$ и следователно $\varphi(x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Последното тъждество показва, че $\sin x$ и $\cos x$ за всяко x удовлетворяват неравенствата

$$|\sin x|\leqq 1,\quad |\cos x|\leqq 1.$$

Ще докажем, че за всички стойности на x и a са в сила т. нар. събирателни формули

$$\begin{aligned}\sin(x+a)&=\sin x\cos a+\sin a\cos x,\\ \cos(x+a)&=\cos x\cos a-\sin x\sin a.\end{aligned}\tag{27}$$

За да ги докажем, ще положим

$$s(x)=\sin(x+a),\quad c(x)=\cos(x+a),\quad \sigma(x)=\sin x\cos a+\sin a\cos x,$$
$$\zeta(x)=\cos x\cos a-\sin x\sin a.$$

Веднага се проверява, че функциите s, c и σ, ζ са нормални в интервала $(-\infty, +\infty)$ (не ще извършваме проверката). Също така веднага се вижда, че

$$s(0)=\sigma(0),\ c(0)=\zeta(0),\ s''x)=c(x),\ c'(x)=-s(x),$$
$$\sigma'(x)=\zeta(x),\ \zeta'(x)=-\sigma(x).$$

Но оттук и от лемата на с. 212 следва, че за всяко $x\in(-\infty, \infty)$

$$s(x)=\sigma(x),\ c(x)=\zeta(x),$$

т. е. в сила са равенствата (27).

Сега ще докажем, че числото $\frac{\pi}{2}$ е най-малкият положителен корен на уравнението $\cos x=0$. Това означава, че за всяко $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ имаме $\cos x\neq 0$ (по-точно $\cos x>0$), докато $\cos\frac{\pi}{2}=0$. За да докажем това, най-напред ще отбележим, че $\sin x>0$ за всяко x от интервала $(0, \pi)$. Наистина при $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ имаме $\sin x=\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}>0$ и $\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}>0$. От друга страна, при $x\in(0, \pi)$ имаме $\frac{x}{2}\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и понеже $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, то $\sin x>0$. Оттук следва, че функцията $\cos x$ намалява в интервала $(0, \pi)$, защото в този интервал $(\cos x)'=-\sin x<0$. Ако за всяко

естествено число n положим $x_n = \operatorname{arctg} n$, то $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{tg} x_n = n$. Тогава ще имаме

$$0 < \cos x_n = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x_n}} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} < \frac{1}{n}.$$

От горните съотношения следва, че $\cos \frac{\pi}{2}$ не е положително число, защото, ако допуснем, че $\cos \frac{\pi}{2} > 0$, и изберем n така, че $\frac{1}{n} < \cos \frac{\pi}{2}$, ще получим неравенствата $\cos x_n < \frac{1}{n} < \cos \frac{\pi}{2}$, което е невъзможно, защото $0 < x_n < \frac{\pi}{2}$, а $\cos x$ е намаляваща функция в интервала $(0, \pi)$. Но също така не е възможно да имаме $\cos \frac{\pi}{2} < 0$. Наистина в този случай, ако изберем произволно x' от интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и вземем предвид, че $\cos x' > 0$, бихме могли да заключим, че съществува число $x_0 \in \left(x', \frac{\pi}{2}\right)$, за което $\cos x_0 = 0$, което е невъзможно. От горните разсъждения следва, че $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Оттук и от равенство (26) следва, че $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$, а понеже $\sin \frac{\pi}{2} > 0$, то $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

Лесно се доказва, че $\sin x$ и $\cos x$ са периодични функции с период 2π, т. е. че за всяко x са в сила равенствата $\sin(x+2\pi) = \sin x$ и $\cos(x+2\pi) = \cos x$. Доказателството ще извършим с помощта на събирателните теореми за $\sin x$ и $\cos x$ (равенства (27)). Имаме

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos x = \cos x.$$

Ако в горното равенство дадем на променливата стойност $x+\frac{\pi}{2}$, ще получим

$$\sin(x+\pi) = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= -\sin x,$$

а оттук при стойност на променливата $x+\pi$ ще получим

$$\sin(x+2\pi) = -\sin(x+\pi) = -(-\sin x) = \sin x.$$

Периодичността на $\cos x$ се доказва просто. Наистина

$$\cos(x+2\pi) = \sin\left(x+2\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

ПРОДЪЛЖЕНИЕ НА ФУНКЦИЯТА $\operatorname{tg} x$ ЗА ПРОИЗВОЛНИ СТОЙНОСТИ НА x, РАЗЛИЧНИ ОТ $\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0\pm1, \pm2, \ldots)$

Ние дефинирахме функцията $\operatorname{tg} x$ в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ като обратна функция на функцията $\operatorname{arctg} x$. От друга страна, от дефиницията на $\sin x$ и $\cos x$ се вижда, че

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \quad \text{за } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Следователно

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}. \tag{28}$$

С помощта на горното равенство разширяваме дефиницията на функцията $\operatorname{tg} x$ за всички стойности на x, за които $\cos x \neq 0$. Както лесно се вижда, $\cos x$ се анулира само за $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$. Това следва от факта, че $\cos x \neq 0$ за $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, и от равенствата $\cos(x+k\pi) = (-1)^k \cos x$ и $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Функцията $\operatorname{tg} x$ е нормална във всеки от интервалите $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}\right)$, . . . Това следва от обстоятелството, че $\operatorname{tg} x$ е отношение на нормални функции (предоставяме на читателя да премисли подробностите). Ще споменем само, че за производната на $\operatorname{tg} x$ при всяко $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ ще имаме

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Този резултат не противоречи на намерената по-рано производна

на $\operatorname{tg} x \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$, за която имахме $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x$. Наистина $1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Ще отбележим накрая, че функцията $\operatorname{tg} x$ е периодична с период π. Това веднага следва от дефиниционното равенство (28) и от равенствата $\sin(x+\pi) = -\sin x$ и $\cos(x+\pi) = -\cos x$.

ПРИБЛИЗИТЕЛНО ПРЕСМЯТАНЕ НА ЧИСЛОТО π

Най-напред ще докажем, че $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Наистина

$$1 = \sin \frac{\pi}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}, \quad \cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1,$$

откъдето получаваме, че $\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} = 0$, или $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4}$ $\left(= \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Но $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = 1$, откъдето следва, че $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$.

Нека сега n е произволно фиксирано естествено число, а k — естествено число, удовлетворяващо неравенствата $1 \leqq k \leqq n$. Очевидно е, че за всяко $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ са изпълнени неравенствата

$$\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \leqq \frac{1}{1+x^2} \leqq \frac{1}{1+\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}.$$

Понеже $\operatorname{arctg} x$ е примитивна на функцията $\frac{1}{1+x^2}$ в интервала $(-\infty, +\infty)$, ще са в сила неравенствата

$$\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \leqq \frac{\operatorname{arctg} \frac{k}{n} - \operatorname{arctg} \frac{k-1}{n}}{\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}} \leqq \frac{1}{1+\left(\frac{k-1}{n}\right)^2}.$$

Ако в последните неравенства даваме на k последователно стойности 1, 2, . . ., ще получим неравенствата

$$\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} \leqq \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg} 0}{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{1+0^2},$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} \leqq \frac{\operatorname{arctg}\frac{2}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2} \leqq \frac{\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\frac{n-1}{n}}{\frac{1}{n}} \leqq \frac{1}{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}.$$

Като умножим всички неравенства с $\frac{1}{n}$, съберем почленно и извършим необходимите приведения, получаваме неравенствата

$$n\left[\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n^2}\right] \leqq \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\leqq n\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+(n-1)^2}\right].$$

Най-лявата страна на неравенствата дава $\frac{\pi}{4}$ с недостиг, а най-дясната — с излишък. При това грешката, която правим, като заменим $\frac{\pi}{4}$ с коя да е от горните две суми, няма да надмине (по абсолютна стойност) числото

$$n\left[\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1^2}+\ldots+\frac{1}{n^2+(n-1)^2}-\frac{1}{n^2+1^2}-\frac{1}{n^2+2^2}\right.$$

$$\left.-\ldots-\frac{1}{n^2+(n-1)^2}-\frac{1}{n^2+n^2}\right]=\frac{1}{2n}.$$

Така например, ако изберем $n=10$ и заменим $\frac{\pi}{4}$ с коя да е от сумите $10\left[\frac{1}{10^2+1^2}+\frac{1}{10^2+2^2}+\ldots+\frac{1}{10^2+10^2}\right]$ или $10\left[\frac{1}{10^2}\right.$

$+\frac{1}{10^2+1^2}+\ldots+\frac{1}{10^2+9^2}\Big]$, ще получим приближени стойности за $\frac{\pi}{4}$, които се отличават от $\frac{\pi}{4}$ с не повече от $\frac{1}{20}$.

Горният начин за приблизително пресмятане на π не е най-удобният, но все пак позволява по принцип да пресметнем π с предварително зададена точност.

Забележка. Функциите $\arcsin x$ и $\arccos x$ се дефинират като обратни съответно на функциите $\sin x$ $\left(\text{в интервала } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ и $\cos x$ (в интервала $[0, \pi]$). Тъй като при дефиницията и доказателствата на техните свойства не се срещат принципни затруднения, не ще се спираме на този въпрос.