ФУНКЦИИ, КОИТО УДОВЛЕТВОРЯВАТ ИЗВЕСТНИ НЕРАВЕНСТВА ВЪРХУ РЕАЛНАТА ОС

От Я. Тагамлицки

В настоящата работа ние установяваме, че освен функциите $f(x) = Ce^x$ няма други, които при всяко цяло неотрицателно k за всяко x на ляво от някоя фиксирана точка от реалната ос удовлетворяват неравенствата

$$\left|\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right| \leqq Ae^x.$$

За всичките функции, които ние разглеждаме, се предполага, че са дефинирани върху реалната ос, обаче, евентуално, могат да приемат комплексни стойности, ако изрично не е казано противното. Освен споменатата теорема, ние даваме в нашата работа различни нейни уточнявания и приложения. При едно от прецизиранията ние си служим с помощна теорема, която представлява частен случай от по-обща теорема на г-н проф. Обрешков. Тази помощна теорема е построена по подобие на друга една теорема, която г-н проф. Обрешков ни беше задал като задача. В последния параграф е направено едно обобщение, като мястото на производната заемат оператори от по-общ характер. Като приложение на формулираната по-горе теорема и нейните обобщения, ние установяваме една класа редици от функции, които имат свойството, че сходимостта им в една единствена точка влече след себе си сходимостта в цялия интервал, в който са дефинирани.

§ 1

Теорема 1. Нека $f(x)$ е безбройно много пъти диференцуема за $x < a$ и

$$\left|\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right| \leqq Ae^x \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

Ние ще покажем, че

$$f(x) = Be^x,$$

където B е една константа, чийто модул не надминава A. (Обратното е тривиално).

Доказателство. Ние ще използуваме методата на Liouville-Riemann, която ни дава възможност да дефинираме оператора $\frac{d^z}{dx^z}$ за всякакви комплексни значения на z. За тая цел да разгледаме

$$f_k^{(z)}(x) = \frac{1}{\Gamma(k-z)} \int_{-\infty}^{x} \frac{d^k f(t)}{dt^k} \cdot (x-t)^{k-z-1} dt, \quad x < a.$$

Изразът $f_k^{(z)}(x)$ е дефиниран за всяко цяло неотрицателно k и всяко комплексно z, за което $R(z) < k$, понеже неравенствата (1) осигуряват сходимостта на интеграла. При всяко фиксирано x и k изразът $f_k^{(z)}(x)$ е еднозначно дефиниран и е холоморфна функция на z. От друга страна

$$f_k^{(z)}(x) = f_{k+1}^{(z)}(x),$$

както това се вижда с едно интегриране по части:

$$\frac{1}{\Gamma(k-z)} \int_{-\infty}^{x} \frac{d^k f(t)}{dt^k} \cdot (x-t)^{k-z-1} dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k+1-z)} \int_{-\infty}^{x} \frac{d^{k+1} f(t)}{dt^{k+1}} \cdot (x-t)^{k-z} dt.$$

И тъй изразът $f_k^{(z)}(x)$ не зависи от k (разбира се, той е дефиниран само за цели неотрицателни стойности на k, и, следователно, като изменяме k, ние ще му даваме само такива стойности). Но тъй като на k можем да дадем произволно големи стойности, значи имаме възможност да продължим $f_k^{(z)}(x)$ в цялата равнина z. И така, $f_k^{(z)}(x)$ при всяко фиксирано значение на x представлява една цяла функция на z. Ние от сега нататък ще пишем $f^{(z)}(x)$ вместо $f_k^{(z)}(x)$, понеже $f_k^{(z)}(x)$ не зависи от k. Сега ние ще покажем, че за цели значения на z имаме

$$f^{(z)}(x) = \frac{d^z f(x)}{dx^z}.$$

И наистина, понеже k е произволно цяло неотрицателно число, стига да имаме $k > z$, можем да вземем $k = z+1$ и тогава

$$f^{(z)}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{d^{z+1} f(t)}{dt^{z+1}} dt = \frac{d^z f(x)}{dx^z},$$

което оправдава и избрания начин на означение. Ние ще изучим $f^{(z)}(x)$, като функция на z при фиксирано x.

Като използваме неравенствата (1), получаваме

$$|f^{(z)}(x)| \leqq \frac{A}{|\Gamma(k-z)|}\int_{-\infty}^{x} e^{t}(x-t)^{k-R(z)-1}\,dt = \frac{Ae^{x}\Gamma[k-R(z)]}{|\Gamma(k-z)|}.$$

Обаче,

$$\left|\frac{\Gamma[k-R(z)]}{\Gamma(k-z)}\right| = \left|\frac{e^{C(k-z)}(k-z)\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{k-z}{\nu}\right)e^{-\frac{k-z}{\nu}}}{e^{C[k-R(z)]}[k-R(z)]\prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1+\frac{k-R(z)}{\nu}\right)e^{-\frac{k-R(z)}{\nu}}}\right| =$$

$$= \left|\frac{k-z}{k-R(z)}\right|\prod_{\nu=1}^{\infty}\left|\frac{1+\frac{k-z}{\nu}}{1+\frac{k-R(z)}{\nu}}\right|\left|e^{\frac{z-R(z)}{\nu}}\right| =$$

$$= \left|\frac{k-z}{k-R(z)}\right|\sqrt{\prod_{\nu=1}^{\infty}\left[1+\frac{J^2(z)}{[\nu+k-R(z)]^2}\right]},$$

където $R(z)$ и $J(z)$ означават съответно реалната и имагинерната част на z, т. е. $z=R(z)+i\,J(z)$. Но безкрайното произведение под корена представлява точно остатъчният член на сходящото произведение

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}\left[1+\frac{J^2(z)}{[\nu-R(z)]^2}\right], \qquad \nu \neq R(z)$$

и, следователно, клони към единица, когато k расте неограничено. И така, като оставим k да расте към безкрайност, получаваме

$$|f^{(z)}(x)| \leqq Ae^{x},$$

която горна граница не зависи от z. Като имаме предвид, че $f^{(z)}(x)$ е една цяла функция на z, заключаваме въз основа на теоремата на Liouville, че тя е една константа.

Сега ще покажем, че $f(u)$ е развиваема в Тайлоров ред около точката x. И наистина,

$$f(u)=f(x)+\frac{u-x}{1!}f'(x)+\frac{(u-x)^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{(u-x)^n}{n!}f^{(n)}(x)+R_n(x,u),$$

където

$$R_n(x,u)=\frac{1}{n!}\int_{x}^{u} f^{(n+1)}(t)\,(u-t)^n\,dt.$$

Тъй като, обаче,

$$|R_n(x,u)| \leqq \frac{Ae^a|u-x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

следователно, когато n расте неограничено, $R_n(x,u)$ при фиксирани x и u клони към 0. И така, за всяко $u < a$, имаме

$$f(u) = f(x) + \frac{u-x}{1!}f'(x) + \frac{(u-x)^2}{2!}f''(x) + \cdots$$

и, следователно,

$$f(u) = f(x)\left[1 + \frac{u-x}{1!} + \frac{(u-x)^2}{2!} + \cdots\right] = f(x)e^{u-x} = Be^u,$$

което трябваше да се установи. Разбира се, нашето доказателство остава в сила и тогава, когато функцията $f(x)$ приема и комплексни стойности.

§ 2

Доказаната теорема 1 може да бъде прецизирана по различни начини. На тоя въпрос са посветени следващите теореми 2 и 3.

Първо ние ще покажем, че условието, щото неравенствата

$$\left|\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right| \leqq Ae^x \tag{2}$$

да бъдат изпълнени за в с я к о $x < a$, може да бъде заменено с друго, при което се иска въпросните неравенства да бъдат изпълнени само за н я к о и значения на x. По-точно, ние ще докажем следната

Теорема 2. А к о $f(x)$ е а н а л и т и ч н а з а $x < a$ и н е р а в е н с т в а т а

$$\left|\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right| \leqq Ae^x \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots,)$$

с а и з п ъ л н е н и з а б е з б р о й н о м н о г о з н а ч е н и я

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \tag{3}$$

н а а р г у м е н т а, и з м е ж д у к о и т о и м а и п р о и з в о л н о г о л е м и п о а б с о л ю т н а с т о й н о с т о т р и ц а т е л н и ч и с л а, т о

$$f(x) = Ce^x$$

к ъ д е т о C е е д н а к о н с т а н т а, ч и й т о м о д у л н е н а д м и н а в а A.

Изискването $f(x)$ да бъде аналитична означава, че $f(x)$ е развиваема в степенен ред около всяко $x < a$ (оттук следва, впрочем, като се имат предвид неравенствата (2), че $f(x)$ е дори цяла функция). Това ограничение не внася никакъв нов елемент, понеже, щом са изпълнени неравенствата (2) за всяко x (както се иска при формулировката на теорема 1), то $f(x)$ от само себе си е аналитична (дори цяла) функция.

Доказателство. Нека фиксираме едно число x_n от редицата (3). От условието за аналитичност на $f(x)$ и от неравенствата (2) следва, че $f(x)$ е цяла функция, както току що видяхме, т. е. за всяко x имаме

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f^{(\nu)}(x_n)}{\nu!}(x-x_n)^{\nu},$$

и, следователно,

$$f^{(k)}(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f^{(k+\nu)}(x_n)}{\nu!}(x-x_n)^{\nu},$$

откъдето при $x>x_n$

$$|f^{(k)}(x)|\leqq Ae^{x_n}\sum\frac{(x-x_n)^{\nu}}{\nu!}=Ae^{x_n}e^{x-x_n}=Ae^{x}.$$

Измежду числата x_n, обаче, има и произволно големи по абсолютна стойност отрицателни числа, т. е. неравенствата (2) са изпълнени за всяко $x<a$ и, следователно, въз основа на теорема 1,

$$f(x)=Ce^{x}.$$

Сега ще направим едно друго прецизиране на теорема 1, като покажем, че условието щото неравенствата (2) да бъдат изпълнени за всяко цяло неотрицателно k, може да бъде заменено с друго, при което се иска тия неравенства да бъдат изпълнени само за някои значения на k, измежду които има и произволно големи. За целта ние ще докажем следната

Помощна теорема[1]). *Нека функцията $f(x)$ е дефинирана и n пъти диференциуема за $x<a$; нека освен това*

$$|f^{(n)}(x)|\leqq Ae^{x}\quad\text{и}\quad\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,$$

където A е една реална константа. В такъв случай за всяко цяло k, за което

$$0\leqq k\leqq n,$$

имаме

$$|f^{(k)}(x)|\leqq Ae^{x}.$$

---

[1]) Това е специален случай от една теорема на г-н проф. Обрешков Вж. Н. Обрешков, Върху сумирането на редовете с типичните средни, Годишник на Софийския Университет том XLI, 1944—1945, стр. 121,

Доказателство. Да разгледаме функцията

$$\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{-\infty}^{x} f^{(n)}(t)\,(x-t)^{n-1}dt.$$

Очевидно имаме

$$\varphi^{(n)}(x)=f^{(n)}(x),$$

и, следователно,

$$\varphi(x)=f(x)+P(x),$$

където $P(x)$ е един полином най-много от $n-1$ степен. От друга страна

$$|\varphi(x)|\leqq\frac{1}{\Gamma(n)}\int_{-\infty}^{x}|f^{(n)}(t)|\,(x-t)^{n-1}dt\leqq\frac{A}{\Gamma(n)}\int_{-\infty}^{x}e^{t}(x-t)^{n-1}dt=$$

$$=\frac{Ae^{x}}{\Gamma(n)}\int_{0}^{\infty}e^{-u}u^{n-1}du=Ae^{x}$$

и, като имаме предвид, че

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,$$

заключаваме, че

$$P(x)\equiv 0,$$

и, следователно,

$$\varphi(x)=f(x).$$

Като имаме предвид, обаче, че при $k<n$

$$f^{(k)}(x)=\frac{1}{\Gamma(n-k)}\int_{-\infty}^{x} f^{(n)}(t)\,(x-t)^{n-k-1}\,dt,$$

заключаваме, като използвуваме неравенството

$$|f^{(n)}(t)|\leqq Ae^{t},$$

че

$$|f^{(k)}(x)|\leqq\frac{A}{\Gamma(n-k)}\int_{-\infty}^{x}e^{t}(x-t)^{n-k-1}dt=$$

$$=\frac{Ae^{x}}{\Gamma(n-k)}\int_{0}^{\infty}e^{-u}u^{n-k-1}du=Ae^{x},$$

което и трябваше да се установи.

Сега вече ние сме готови да формулираме прецизирането на теорема 1, за което споменаваме по-горе.

Теорема 3. Нека $f(x)$ е дефинирана и безбройно много пъти диференцуема за $x<a$; нека неравенствата

$$\left|\frac{d^{k_l}f(x)}{dx^{k_l}}\right| \leqq Ae^x$$

са изпълнени за всяко $x<a$ и безбройно много значения на k_l, измежду които има и произволно големи; нека освен това

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0;$$

в такъв случай

$$f(x)=Ce^x,$$

където C е една константа, чийто модул не надминава A.

Доказателство. Въз основа на току що доказаната помощна теорема заключаваме, че неравенствата (2) са изпълнени за всяко $x<a$ и всяко цяло неотрицателно k. Но в такъв случай влиза в сила теорема 1, и, следователно,

$$f(x)=Ce^x.$$

Теорема 4. Нека

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad f_3(x),\ldots \tag{4}$$

е една редица от функции, дефинирани и безбройно много пъти диференцуеми за $x<a$, която притежава следното свойство: за всяко цяло неотрицателно k и за всяко $x<a$ съществува $N(k,x)$ така, че щом $n>N(k,x)$ да са изпълнени неравенствата

$$|f_n^{(k)}(x)-f_{n+p}^{(k)}(x)| \leqq Ae^x, \tag{5}$$

за всяко цяло неотрицателно p. Нека освен това както редицата (4) така и редиците от k-тите производни, за всяко цяло положително k, образуват нормални фамилии във всеки краен интервал, разположен в ляво от a. Ако редицата (4) е сходяща поне в една точка x_0, тя е сходяща за всяко $x<a$.

Доказателство. Доказателството може да се извърши с добре познати методи: да допуснем, че редицата (4) е разходяща. В такъв случай могат да се изберат поне две подредици

$$f_{n_1}(x), \quad f_{n_2}(x), \ldots$$
$$f_{m_1}(x), \quad f_{m_2}(x), \ldots,$$

които конвергират към различни граници $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Това може да се постигне така: щом редицата (4) е разходяща, има поне една точка ξ, в която редицата от функционалните стойности е разходяща. Ние ще изберем две подредици от редицата (4)

$$g_1(x), \quad g_2(x), \ldots$$
$$h_1(x), \quad h_2(x), \ldots,$$

които в точката ξ конвергират към различни граници. Това е винаги възможно, понеже редицата (4) е ограничена при всяко фиксирано x. От тия две последни редици избираме подредиците

$$p_1(x), p_2(x), \ldots$$
$$q_1(x), q_2(x), \ldots$$

които конвергират в интервала $(a-1, a)$. От последните две редици избираме по една подредица, всяка от които конвергира в интервала $(a-2, a)$. От получените две редици избираме по една подредица, всяка една от които конвергира в интервала $(a-3, a)$ и т. н. В такъв случай двете диагонални подредици, които съответствуват на получените две системи от безбройно много редици, конвергират за всяко $x < a$. Нека тия диагонални подредици са

$$f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \ldots$$
$$f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), \ldots$$

и техните граници са $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. С това е постигнато, че $\varphi(\xi) \neq \psi(\xi)$. Като използваме същия процес, ние от последните две подредици ще изберем по една подредица

$$f_{k_1}(x), f_{k_2}(x), \ldots$$
$$f_{l_1}(x), f_{l_2}(x), \ldots,$$

чиито производни образуват редици, равномерно сходящи във всеки краен интервал, разположен на ляво от a. В такъв случай респективните им граници са непременно $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$. От последните две редици си образуваме две подредици, чиито втори производни конвергират равномерно във всеки краен интервал, разположен на ляво от a. За техните граници е сигурно, че са респективно $\varphi''(x)$ и $\psi''(x)$ и т. н. Като образуваме двете диагонални подредици на двете системи от безбройно много редици, получаваме редиците

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$$
$$\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$$

за които е осигурено, че

$$\lim_{\nu\to\infty} \varphi_\nu^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x), \quad \lim \psi_\nu^{(k)}(x) = \psi^{(k)}(x) \text{ и } \varphi(\xi) \neq \psi(\xi)$$

Като вземем предвид от друга страна, че за всяко фиксирано k и x за достатъчно големи ν имаме

$$|\varphi_\nu^{(k)}(x) - \psi_\nu^{(k)}(x)| \leqq Ae^x,$$

намираме след граничен преход

$$|\varphi^{(k)}(x) - \psi^{(k)}(x)| \leqq Ae^x \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

откъдето

$$\varphi(x) - \psi(x) = Ce^x,$$

и, понеже дадената редица (4) конвергира при $x = x_0$, намираме $C = 0$ и, следователно, $\varphi(x) = \psi(x)$ т. е. при $x = \xi$

$$\varphi(\xi) = \psi(\xi),$$

което противоречи на неравенството $\varphi(\xi) \neq \psi(\xi)$, с което нашето твърдение е доказано

В условието на теорема 4 се иска всяка една от редиците

(6) $$f_1^{(k)}(x), f_2^{(k)}(x), \ldots \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

да образува във всеки краен интервал, разположен на ляво от a, нормална фамилия. Това, например, е изпълнено, ако всяка една от редиците (6) е равномерно ограничена във всеки един от въпросните интервали. Горната граница може при това да се изменя заедно с k или с разглеждания интервал.

Теорема 4 може да се прецизира, като използваме теорема 2 или теорема 3. По тоя начин получаваме:

Теорема 5. *Твърдението на теорема 4 остава в сила, ако неравенствата (5) са изпълнени за всяко k, но само за стойностите*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

на аргумента, измежду които има и произволно големи по абсолютна стойност отрицателни числа, стига $f_n(z)$ да са аналитични в една двумерна област G, която не зависи от n и съдържа частта от реалната ос $x < a$ и освен това функциите $f_n(z)$ са равномерно ограничени във всяка крайна двумерна подобласт на G.

Теорема 6. *Твърдението на теорема 4 остава в сила, ако неравенствата (5) са изпълнени за всяко $x < a$ и безбройно много значения на k*

$$k_0 = 0, \quad k_1, k_2, \ldots,$$

измежду които има и произволно големи, и останалите условия на теорема 4 са изпълнени.

Като един тривиален пример на редица, за която е изпълнено условието (5), може да служи всяка редица (4), за която редиците от производните

$$f_1^{(k)}(x),\ f_2^{(k)}(x), \ldots$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots$$

са сходящи при всяко $x < a$.

Сега ние ще дадем един друг пример към теорема 4, като изучим реда

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x), \tag{7}$$

където

$$P_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \frac{x^k}{k!}$$

при предположението, че редът

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{\nu-1}}{\nu!} x^\nu$$

представлява една цяла функция. Същевременно ще се види, че условието (5) може да бъде изпълнено и без редицата (4) да е сходяща.

Първо ние ще покажем, че ако парциалните суми

$$f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu P_\nu(x)$$

образуват ограничена редица поне за една точка x_0, редицата

$$f_1(x), f_2(x), \ldots$$

удовлетворява условието (5). За целта ние предварително ще покажем, че парциалните суми $\sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$ остават ограничени, когато n се мени. И наистина,

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu = \frac{f_n(x_0) + \sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{a_0 + \cdots + a_{\nu-1}}{\nu!} x_0^\nu}{P_n(x_0)},$$

където числителят остава ограничен, а знаменателят клони към e^{x_0}, т. е. към една величина отлична от нула, когато n расте неограничено.

Сега вече сме готови да покажем, че условието 5 е изпълнено. Да разгледаме

$$f_{n+p}(x)-f_n(x)=\left(\sum_{\nu=0}^{n+p} a_\nu\right)P_{n+p}(x)-\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\right)P_n(x)-\sum_{\nu=n+1}^{n+p}\frac{a_0+\cdots+a_{\nu-1}}{\nu!}x^\nu.$$

Оттук при $n \geqq k$

$$\frac{d^k}{dx^k}[f_{n+p}(x)-f_n(x)]=\left(\sum_{\nu=0}^{n+p} a_\nu\right)P_{n+p-k}(x)-$$

$$-\left(\sum_{\nu=0}^{n+p} a_\nu\right)P_{n-k}(x)-\sum_{\nu=n+1}^{n+p}\frac{a_0+\cdots+a_{\nu-1}}{(\nu-k)!}x^{\nu-k}$$

Сега да фиксираме k и x и да изберем $N>0$ толкова голямо, че при $n-k>N$ да имаме

$$|P_{n-k}(x)| \leqq 2e^x$$

(това е възможно, понеже $P_{n-k}(x)$ клони към e^x, когато n расте неограничено) и

$$\left|\sum_{\nu=n+1}^{n+p}\frac{a_0+a_1+\cdots+a_{\nu-1}}{(\nu-k)!}x^{n-k}\right| \leqq e^x$$

(това пък е възможно, понеже редът

$$\sum_{\nu=k}^{\infty}\frac{a_0+\cdots+a_{\nu-1}}{(\nu-k)!}x^{\nu-k}$$

е сходящ). Нека сега означим с M една горна граница на $\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu$, когато m се мени. В такъв случай при $n>N+k$ имаме

$$\left|\frac{d^k}{dx^k}[f_{n+p}(x)-f_n(x)]\right| \leqq (2M+1)e^x$$

И така условието (5) е действително изпълнено. Това показва, че щом редицата

$$f_1(x), f_2(x), \ldots$$

е сходяща поне за една стойност на x, тя е сходяща за всяко реално x. Това, впрочем, се вижда и директно от равенството

$$f_n(x)=\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\right)P_n(x)-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{a_0+\cdots+a_{\nu-1}}{\nu!}x^\nu$$

Специално редицата

$$f_1(o),\ f_2(o), \ldots$$

трябва да конвергира, т. е. редът $\sum_{n=0}^{\infty} a_\nu$ трябва да бъде сходящ.

Нека сега подберем a_ν така, че редът $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ да бъде разходящ, но редицата от парциалните му суми да бъде ограничена. В такъв случай редицата (4) изпълнява условието (5), тъй като

$$f_1(o),\ f_2(o), \ldots$$

е ограничена редица, но редицата (4) не е сходяща за никое x.

Сега ще направим едно друго приложение на теорема 1. Функцията

$$f(x) = \frac{C}{x+r}, \quad r > 0, \quad x > 0$$

притежава следните свойства:

1. тя може да бъде представена като Laplace'ов интеграл

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} F(t)\, dt$$

(за целта е достатъчно да се избере $F(t) = Ce^{-rt}$) и

2. тя удовлетворява неравенствата:

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} [x^n f(x)] \right| \leqq \frac{|C| r^n k!}{(x+r)^{k+1}}$$

за всяко цяло неотрицателно n.

Ние ще покажем, че тия две свойства характеризират напълно функциите от вида $\frac{C}{x+r}$. По-точно, ние ще докажем следната

Теорема 6. Ако функцията $f(x)$ може да се представи във вида

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} F(t)\, dt,$$

където $F(t)$ е една безбройно много пъти диференцуема за $t \geqq 0$ функция, и ако $f(x)$ удовлетворява неравенствата

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} [x^n f(x)] \right| \leqq \frac{A r^n k!}{(x+r)^{k+1}}$$

за всяко цяло неотрицателно n и достатъчно големи k, то

$$f(x)=\frac{C}{x+r},$$

където C е една константа, чийто модул не надминава A.

Доказателство. Тук ние ще си послужим с една теорема на Widder[1]), която гласи така: ако Laplace'овия интеграл

$$f(x)=\int_0^\infty e^{-xt}F(t)\,dt$$

притежава една полуравнина на сходимост (т. е. не е разходящ за всяко x), то във всяка точка на непрекъснатост $t>0$ за $F(t)$ имаме:

$$F(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}f^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right),$$

като съществуването на границата също се твърди (а не се предполага).

Като интегрираме по части n пъти, намираме

$$x^n f(x)=x^n\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{F^{(\nu)}(0)}{x^{\nu+1}}+\int_0^\infty e^{-xt}F^{(n)}(t)\,dt.$$

Въз основа на теоремата на Widder имаме

$$F^{(n)}(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}\varphi^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right),$$

където

$$\varphi(x)=x^n f(x)-x^n\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{F^{(\nu)}(0)}{x^{\nu+1}}.$$

Но за достатъчно големи k имаме

$$\varphi^{(k)}(x)=[x^n f(x)]^{(k)},$$

т. е.

$$\left|\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}\varphi^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right)\right|=\left|\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}\left[\left(\frac{k}{t}\right)^n f\left(\frac{k}{t}\right)\right]^{(k)}\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{k!}\left(\frac{k}{t}\right)^{k+1}\frac{k!\,r^n A}{\left(\frac{k}{t}+r\right)^{k+1}}=\frac{Ar^n}{\left(1+\frac{rt}{k}\right)^{k+1}},$$

---

[1]) Вж. G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, стр. 130.

който израз клони към $Ar^n e^{-rt}$, когато k расте неограничено. И така

$$|F^{(n)}(t)| \leqq Ar^n e^{-rt}.$$

Сега ще разгледаме функцията

$$\varphi(\xi) = F\left(\frac{-\xi}{r}\right) \quad \text{при} \quad \xi < 0.$$

Очевидно

$$\varphi^{(n)}(\xi) = \frac{(-1)^n}{r^n} F^{(n)}\left(\frac{-\xi}{r}\right),$$

т. е.

$$|\varphi^{(n)}(\xi)| \leqq Ae^{\xi} \quad \text{за всяко } \xi < 0$$

и, следователно,

$$\varphi(\xi) = Ce^{\xi}$$

откъдето

$$F(t) = Ce^{-rt},$$

т. е.

$$f(x) = \frac{C}{x+r}.$$

§ 3

Всичко изложено до сега сочи ползата от теореми от вида на теорема 1. За това ние ще посветим тоя параграф на въпроса за обобщаването на тая теорема и то в следния смисъл: при теорема 1 играе основна роля операторът $\frac{d}{dx}$, който бива итериран. Ние ще си поставим следния въпрос: не могат ли да се намерят и други оператори с аналогично свойство (т. е. за тях да съществува теорема подобна на теорема 1). Отговорът на тоя въпрос, както ще видим е утвърдителен. Ние ще изучим сега една класа от такива оператори, ще установим някои техни основни свойства и ще видим как са свързани те и техните итерации с оператора $\frac{d}{dx}$ и неговите итерации.

Изобщо казано (т. е. ако се абстрахираме от някои случаи, които могат да се разглеждат като изключения) за операторите от типа

$$a(x) + b(x)\frac{d}{dx}$$

може да се установи теорема от типа на теорема 1. Тук ние ще се спрем на особено простия случай, когато

$$a(x) = 1.$$

И така, което не е съществено ограничение за функцията $b(x)$, операторите, които ние ще изучим сега, се дефинират по следния начин

$$\bigwedge_{\varphi(x)} f(x) = f(x) + \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} f'(x) = \frac{1}{\varphi'(x)} \frac{d}{dx} \varphi(x) f(x).$$

Това трябва да се разбира така: операторът $\bigwedge_{\varphi(x)}$ е дефиниран, щом е направен изборът на функцията $\varphi(x)$. Функцията пък $f(x)$ е оная функция, върху която операторът е приложен. За нашите цели, както ще видим, от особено значение ще бъдат точките, в които функцията $\varphi(x)$ се анулира. Такива точки ще наричаме критични точки на оператора $\bigwedge_{\varphi(x)}$.

Под $\bigwedge_{\varphi}^{k}$ за цели положителни значения на k ще разбираме k-тата итерация на $\bigwedge_{\varphi}$; $\bigwedge_{\varphi}^{0} f(x)$ ще означава $f(x)$. Символът $\bigwedge_{\varphi}^{k} f(x)$ има смисъл за всички значения на x, за които функциите $f(x)$ и $\varphi(x)$ са k пъти диференцуеми и $\varphi'(x) \neq 0$.

При пресмятанията е полезно да се имат предвид следните тривиални свойства на оператора:

1. $$\bigwedge_{\varphi}[f(x) + g(x)] = \bigwedge_{\varphi} f(x) + \bigwedge_{\varphi} g(x)$$
2. $$\bigwedge_{\varphi} c f(x) = c \bigwedge_{\varphi} f(x),$$

което означава, че операторът $\bigwedge_{\varphi}$ е линеен и хомогенен;

3. $$\bigwedge_{\varphi} f(x) g(x) = g(x) \bigwedge_{\varphi} f(x) + f(x) \bigwedge_{\varphi} g(x) - f(x) g(x),$$
4. $$\bigwedge_{\varphi} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) \bigwedge_{\varphi} f(x) - f(x) \bigwedge_{\varphi} g(x) + f(x) g(x)}{g^2(x)}.$$
5. $$\bigwedge_{\varphi} \varphi^n(x) = (n+1) \varphi^n(x), \quad \text{специално} \quad \bigwedge_{\varphi} \frac{1}{\varphi} = 0.$$
6. $$\bigwedge_{\varphi} \frac{[\lg c\, \varphi(x)]^n}{\varphi(x)} = -\frac{n [\lg c\, \varphi(x)]^{n-1}}{\varphi(x)}.$$

Нека $f(z)$ и $\varphi(z)$ са холоморфни в една едносвързана област G, като във вътрешността на G функцията $\varphi(z) \neq 0$. В такъв случай съществува един еднозначен клон на

$$\psi(z) = \lg \frac{\varphi(z)}{\varphi(a)}$$

в G, за който

$$\psi(a) = 0,$$

където a е една точка от G.

Като приложим теоремата на резидуумите, намираме за случая, когато $\varphi'(z) \neq 0$ в G:

$$\bigwedge_{\varphi} f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)\, \varphi'(t)}{\varphi(a) \lg \frac{\varphi(t)}{\varphi(a)}} dt$$

където интегрирането е извършено в положителна посока по един контур около a. Сега, като имаме предвид формулата 6, намираме

7.
$$\varphi(a)\bigwedge\nolimits_{\varphi}^{k} f(a)=\frac{k!}{2\pi i}\oint\frac{f(t)\,\varphi'(t)\,dt}{\left[\lg\frac{\varphi(t)}{\varphi(a)}\right]^{k+1}},$$

В известни случаи е полезно да се има предвид и зависимоста

8.
$$\varphi'(a)\bigwedge\nolimits_{\varphi} f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{f(t)\,\varphi'(t)}{(t-a)^2}\,dt,$$

която е валидна във всяка област на холоморфност за $f(z)$ и $\varphi(z)$.

Нека се спрем върху зависимостта, която съществува между различните итерации на $\bigwedge_{\varphi}$ и итерациите на $\frac{d}{dx}$. Веднага индуктивно се установява следната зависимост:

(7)
$$\varphi(x)\bigwedge\nolimits_{\varphi}^{k} f(x)=\frac{d^k}{du^k}e^u f(x),$$

където u е дефинирана от

$$\varphi(x)=e^u.$$

Въз основа на тая зависимост ние ще получим едно обобщение на теорема 1, като ролята на оператора $\frac{d}{dx}$ ще се поеме от оператора $\bigwedge_{\varphi}$.

Теорема 7. Нека $\varphi(x)$ е една реална функция (т. е. както x така и стойностите на $\varphi(x)$ са реални числа), дефинирана, безбройно много пъти диференцуема и положителна в отворения интервал (a,b); нека освен това b е една критична точка на оператора $\bigwedge_{\varphi}$ (т. е. $\varphi(x)$ клони към нула, когато x клони към b); нека най-сетне $\varphi'(x)\neq 0$ в отворения интервал (a,b). Ние ще покажем, че щом в целия отворен интервал (a,b) са изпълнени неравенствата

(8)
$$\left|\bigwedge\nolimits_{\varphi}^{k} f(x)\right|\leqq A,$$

при всяко цяло неотрицателно k, за една функция $f(x)$ дефинирана и безбройно много пъти диференцуема в (a,b), то

$$f(x)=C,$$

където

$$|C|\leqq A.$$

Доказателство. И наистина, понеже

$$\varphi'(x) \neq 0,$$

уравнението

$$\varphi(x) = e^u$$

при всяко дадено u може да има само едно решение x (въз основа на теоремата на Rolle). От друга страна, когато $x \to 0$, то $\varphi(x) \to 0$, т. е. за всички стойности на u между $-\infty$ и $\lg \varphi(a)$ уравнението има поне едно решение; и така съществува една еднозначно дефинирана в интервала $(-\infty, \lg \varphi(a))$ функция

$$x = \psi(u),$$

определена като неявна функция чрез

$$\varphi(x) = e^u.$$

Да разгледаме сега функцията

$$g(u) = e^u f(\psi(u)).$$

За тая функция имаме въз основа на (7) и (8)

$$\left| \frac{d^k}{du^k} g(u) \right| \leqq A e^u$$

в цялия отворен интервал $(-\infty, \lg \varphi(a))$, за всяко цяло неотрицателно k, т. е.

$$g(u) = C e^u$$

и, следователно,

$$f(x) = C.$$

Теорема 1 се получава като частен случай от току що доказаното при специалния избор

$$\varphi(x) = e^x,$$

като операторът $\wedge_\varphi$ се прилага към функцията $e^{-x} f(x)$.

(Постъпила на 18 ноември 1945 г.)

FUNKTIONEN, DIE AUF DER REELLEN ACHSE GEWISSEN UNGLEICHUNGEN GENÜGEN

Von J. Tagamlizki

ZUSAMMENFASSUNG

Für die Funktionen $f(x) = Ce^x$ sind die Ungleichungen

(1) $$\left| \frac{d^k f(x)}{dx^k} \right| \leqq Ae^x$$

trivialerweise erfüllt, sobald die Beziehung $|C| \leqq A$ besteht. In dieser Arbeit beweisen wir nun umgekehrt:

Satz I. Ist $f(x)$ für $x < a$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion, die den Ungleicungen (1) für alle $x < a$ und alle ganzzahligen nicht negativen k genügt, so ist

$$f(x) = Ce^x,$$

wobei $|C| \leqq A$ ist.

Wir beweisen diesen Satz indem wir den Operator $\frac{d^z}{dx^z}$ nach Liouville-Riemann für jedes komplexe z definieren und dann bei festem x den Ausdruck

$$\frac{d^z f(x)}{dx^z}$$

als Funktion von z studieren.

Als Verschärfungen werden folgende Sätze angegeben:

1. Gelten die Ungleichungen (1) für jedes nicht negative ganzzahlige k, aber nur für die Werte

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ldots$$

des Argumentes, unter denen es absolut beliebig grosse negative Zahlen gibt, so ist der Schluss des Satzes I immer noch richtig, sobald die Funktion $f(x)$ für $x < a$ analytisch ist.

2. Gelten die Ungleichungen (1) für jedes $x < a$ aber nur für die Werte

$$k_1, \ k_2, \ldots$$

von k, unter denen es beliebig grosse gibt, so ist der Schluss des Satzes I immer noch richtig, sobald

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Weiter werden verschiedene Anwendungen gemacht.

Zum Schluss wird Satz I verallgemeinert, indem anstatt der Ableitung ein allgemeinerer Operator eintritt, der unendlich oft iteriert wird.