НЕРАЗЛОЖИМИТЕ ЕЛЕМЕНТИ И ТЕХНИТЕ ПРИЛОЖЕНИЯ*

проф. Ярослав Тагамлицки

Големите успехи на абстрактния функционален анализ отдавна получиха всеобщо признание. Все пак разпространено е мнението, че въпреки общността истинските ценности на математическата мисъл се съдържат в специалните въпроси на класическата математика, че класическите методи са достатъчни в рамките на класическата математика и че като правило абстрактните методи не дават нищо друго освен това, което вече е открито по друг начин.

Приблизително от 1948 г. ние се стремяхме да разработим такива методи в абстрактния функционален анализ, които биха могли да бъдат използувани системно и в областта на класическия анализ [1]**. Понятието екстремна точка на изпъкнало множество, въведено от Минковски [2] и използувано от С. Н. Бернщейн, Боголюбов, Крилов, Гелфанд, Райков, Б. Над и др., изглежда особено подходящо за тази цел. Известно е, че след важната теорема на Крейн и Милман [9] това понятие придоби голямо значение. Трябва да се отбележи обаче, че теоремата на Крейн и Милман е доказана с помощта на теоремата на Цермело. Големите възможности на метода на екстремните елементи в друго направление на класическия анализ бяха изяснени в забележителната работа на П. Розенблум [3].

---

* Превод на „Неразложимые елементы и их приложения" — резюме на доклада на Я. Тагамлицки, изнесен на международната математическа конференция, състояла се в София през 1956 г. (Вж. „Краткое содержание секционных докладов Болгарской математической сессии, С., 27. VIII — 3. IX. 1956", издадено от БАН.) Преводът е на Т. Генчев. — *Бел. съст.*

** Номерата в средните скоби се отнасят за литературата в края на статията.— *Бел. ред.*

Нашите изследвания се базират на следната теорема [4], която са доказва без помощта на трансфинитна индукция и без теоремата на Цермело:

Ако регулярният* конус K е компактен относно някаква норма $P(x)$ и съдържа ненулеви елементи, то той съдържа и неразложими елменти, т. е. такива ненулеви елементи f, за които от $f=g+h$, $g \in K$, $h \in K$ и $P(f)=P(g)+P(h)$ следва, че g и h са колинеарни и еднопосочни. По-нататък нека някакъв изпъкнал и компактен относно нормата $Q(x)$ конус L се съдържа в K. В такъв случай, ако всичките неразложими елементи f на конуса K лежат в L и удовлетворяват условието $Q(f) \leqq P(f)$, то конусите съвпадат и $Q(x) \leq P(x)$ за всяко $x \in K$.

Тази теорема ще наричаме накратко теорема за конусите. Приложенията ще разпределим по следния начин:

1. Доказателства на известни теореми.

Следващите теореми се доказват по подобен начин с помощта на теоремата за конусите: теоремата на Ф. Рис за линейните функционали в $C[a, b]$ заедно с нейното уточнение, отнасящо се до позитивните функционали; общата теорема на Хаусдорф за моментите заедно с нейното уточнение в случая на позитивни моменти; теоремите на Хамбургер и Стилтес за моментите; теоремата на Ф. Рис за моментите; теоремата на Бохнер за интегралите на Фурие и теоремата на Крамер; теоремата на Блашке—Пик за изпъкналите функции и нейните обобщения за изпъкналост от произволен ред; теоремата на Бернщейн за абсолютно монотонните функции в краен интервал, неговата теорема за абсолютно монотонните функции в безкраен интервал, както и обобщението на Уидер. При това общата природа на тези теореми изпъква в нова светлина.

2. Теореми, открити с помощта на теоремата за конусите, на които са дадени и непосредствени доказателства:

Теоремата за разлагане на клас от функции в обобщен абелов ред [5], теоремата за интерполационния ред на Нютон с неотрицателни коефициенти [6], теоремата на Д. Добрев за полунормите в равнината.

3. Теореми, открити с помощта на теоремата за конусите, други доказателства на които засега не са известни:

Теоремата за абсолютно сходящите редове на Гончаров,

* За необходимите дефиниции вж. [4].

чиито възли растат монотонно; теоремата на Бл. Сендов за регулярно монотонните функции [7].

В заключение ще отбележим, че всеки нормиран конус с изброима координатна система винаги може по такъв начин да се допълни до компактен, че компактната му обвивка да удовлетворява всички условия на теоремата за конусите и следователно да притежава неразложими елементи. По този начин естествено стигаме до едно обобщение на понятието функция, като при това е възможно, както и при обобщението на Л. Шварц, да се диференцира безбройно много пъти. Тези обобщени функции, които ще наричаме псевдофункции, могат да се разглеждат като специални разпределения на Шварц или Микусински, при които нормите остават крайни. Псевдофункциите образуват линейни пространства, в които са в сила теоремата за конусите и подходящ аналог на теоремите на Хели. Функциите на Дирак и техните производни са неразложими елементи в съответните пространства [8]. Тези въпроси успешно допълни и разви по-нататък Ив. Тодоров.

ЦИТИРАНА ЛИТЕРАТУРА

1. Тагамлицки, Я. Годишник на Соф. университет. Т. 44, 1947 — 1948, 317 — 355.
2. Minkowski, H. Gesammelte Abhandlungen, B. II, 131 — 229.
3. Rosenbloom, P. Bull. de la Soc. Math. de France, T. 79, 1951, 1 — 58; T. 80, 1952, 182 — 215.
4. Тагамлицки, Я. Годишник на Соф. университет. Т. 48, 1953 — 1954, 69 — 84.
5. Тагамлицки, Я. Годишник на Соф. университет. Т. 46, 1949 — 1950, 385 — 443.
6. Тагамлицкий, Я. ДАН СССР. Т. 87, 1952, 183 — 186.
7. Сендов, Бл. ДАН СССР. Т. 110. 1956.
8. Тагамлицки, Я. Годишник на Соф. университет. Т. 49, 1954 — 1955, ч. I, 34 — 48 и Т. 49, 1954 — 1955, ч. II, 41 — 54.
9. Krein, M. und D. Milmam. Studia Math. T. 9, 1940, 133 — 138.