Реформа на образованието

ВЪРХУ МОДЕРНИЗИРАНЕТО НА МАТЕРИАЛА ПО МАТЕМАТИКА В СРЕДНИТЕ УЧИЛИЩА ЧРЕЗ ВЪВЕЖДАНЕ НА ЕФОДИКАТА

Я. ТАГАМЛИЦКИ (София)

Думата ефодика се употребява обикновено като съкратено наименование на съчинението на Архимед «Περὶ τῶν μηχανικῶν Θεοςητάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος», в което той излага един нов за онова време метод. С помощта на този метод Архимед е направил множество открития и, по-специално, е намерил обема на кълбото. Обаче разсъжденията, с които той си е служил, не представляват доказателства. Поради това Архимед е давал на откритите с помощта на неговия метод теореми и редовни доказателства, които почиват върху аксиомата на Евдокс. Най-многобройни и най-дълбоки приложения на тази аксиома в древността се дължат на Архимед, поради което много математици сега я наричат аксиома на Архимед.

Тук ние влагаме в думата «ефодика» друг смисъл. Както ще видим, върху аксиомата на Архимед може да се изгради напълно строго една съществена част от анализа. Това ни дава основание да гледаме на Архимед като на родоначалник на изследвания от този род. Под ефодика ние ще разбираме частта от анализа, която ще опишем в следващите редове.

В ефодиката се изучават производни и интеграли. Тази част от анализа обаче се отличава от диференциалното и интегралното смятане, защото не използува никаква аксиома за непрекъснатост на съвкупността от числата, с които работи, а се ограничава с аксиомата на Архимед (според която съвкупността от целите положителни числа не е ограничена отгоре.) По такъв начин изучаването на тази дисциплина може дори да предхожда въвеждането на ирационалните числа, защото аксиомата на Архимед е валидна и в съвкупността на рационалните числа.

Ефодиката се отличава от диференциалното и интегрално смятане и по това, че не използува нито понятието граница, нито понятието непрекъснатост. В средното училище тези понятия не се усвояват задоволително от учениците главно поради това, че не могат да бъдат развити достатъчно и не получават подходящи приложения. Ефодиката ни освобождава от необходимостта да се занимаваме с тези понятия в средното училище. Обаче понятието производна се дефинира точно. Ефодиката е чувствително по-елементарна от диференциалното и интегрално смятане и е по-малка по обем, обаче възможностите за приложения, които тя ни открива както в самата математика, така и във физиката, са сравними с възможностите, които ни дава кой да е пълноценен курс по диференциално и интегрално смятане. На много от тези приложения е необходимо и понятието реално число, което може да бъде въведено допълнително.

Ефодиката се отличава съществено и от пропедевтиката на диференциалното и интегрално смятане, т. е. от традиционните форми на преподаването на тези въпроси в средното училище. Разликата се заключава в това, че ефодиката е една напълно строга математична наука, което не ѝ пречи да бъде достъпна за средношколската младеж. При обичайните изложения на диференциалното и интегрално смятане в средното училище главните затруднения се явяват, когато искаме да докажем критерия за монотонност. В ефодиката обаче този въпрос се разглежда напълно строго и същевременно елементарно. С това, разбира се, се установява строго и основната теорема на интегралното смятане, защото ако производната на една функция е нула в един интервал, то тя е и монотонно растяща и монотонно намаляваща (и следователно е константа).

Вероятно учениците биха могли да усвояват успешно ефодиката, като се започне нейното преподаване от IX клас. Разбира се, за да може да се реши този въпрос окончателно, е необходимо да се направят съответни опити. Такъв опит беше иаправен тази година в летния лагер в село Говедарци, където се подбираха ученици и ученички за Националната математическа гимназия. Кандидатите бяха завършили VIII клас в различни училища на страната. Опитът показа, че учениците могат на тази възраст да усвояват успешно ефодиката при условие, че тя им се дава във форма, която е рационално разработена в методическо отношение. Въпреки този положителен резултат, ние все още не можем да направим окончателни изводи, защото опитът беше направен с деца, които вече бяха подбирани и които в по-голямата си част се отличаваха с подчертано трудолюбие. В случай обаче, че резултатът на опити, проведени и при нормални училищни условия, се окаже положителен, това ще открие възможност да се използуват производните и интегралите във физиката и в математиката още в средното училище. Това би било едно постижение от принципиално значение.

В ефодиката ние се стремим към най-голяма общност. Ние изучаваме функции в някой интервал, които имат производна, удовлетворяваща условието на Липшиц. Обаче тази степен на общност е все пак много голяма. Тя ни дава много повече от това, което е необходимо за приложенията в средношколската математика и физика. Същевременно тази класа от функции, както ще видим, поради простотата си е пригодна за преподаванията в средното училище. За да дадем идея за съдържанието на ефодиката, ние ще разгледаме сега няколко въпроса по същество.

* * *

Нека $f(x)$ е функция, дефинирана в интервала $m \leqq x \leqq n$. Ще казваме, че тази функция е **нормална** в този интервал, ако при всеки избор на числото a от интервала $[m, n]$ функцията $f(a+h)$ на променливата h при $m \leqq a+h \leqq n$ може да се представи във вида

$$f(a+h)=p+qh+R,$$

където p и q не зависят от h и

$$|R| \leqq Ah^2,$$

където A е подходящо число, което не зависи нито от h, нито от a.

Лесно се доказва, че в това развитие p и q са определени еднозначно. По дефиниция полагаме

$$f'(a)=q.$$

Разбира се, рационалните функции са нормални във всеки затворен интервал, в който са дефинирани. Това обстоятелство ни дава възможност да разглеждаме много примери. След дефиницията на понятието нормална функция и на понятието производна се доказват теоремите за диференциране на сума, разлика, произведение, частно и функция от функция.

Главната теорема на ефодиката се формулира по следния начин:

Ако функцията $f(x)$ е нормална в интервала $m \leqq x \leqq n$ и $f'(x) \geqq 0$, то $f(x)$ е монотонно растяща в този интервал.

Доказателството на тази теорема се основава върху аксиомата на Архимед, според която съвкупността от целите положителни числа не е ограничена отгоре.

Доказателство. Нека x_1 и x_2 са две числа, които удовлетворяват неравенствата

$$x_1 < x_2, \quad m \leqq x_1 \leqq n, \quad m \leqq x_2 \leqq n.$$

От условието за нормалност следва

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + R, \tag{1}$$

където

$$|R| \leqq A(x_2 - x_1)^2$$

при подходящ избор на константата A. От (1) получаваме

$$f(x_2) - f(x_1) \geqq -A(x_2 - x_1)^2, \tag{2}$$

защото

$$f'(x_1) \geqq 0, \quad x_2 - x_1 > 0, \quad R \geqq -A(x_2 - x_1)^2.$$

Делим интервала $[x_1, x_2]$ на две равни части. Прилагаме неравенството (2) към двойката точки $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$ и към двойката точки $\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]$. Това ни дава

$$f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqq -\frac{A}{4}(x_2 - x_1)^2,$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f(x_1) \geqq -\frac{A}{4}(x_2 - x_1)^2.$$

Като съберем тези неравенства, получаваме

$$f(x_2) - f(x_1) \geqq -\frac{A}{2}(x_2 - x_1)^2.$$

Ако приложим n пъти този резултат, ще получим при всички цели положителни стойности на n

$$f(x_2) - f(x_1) \geqq -\frac{A}{2^n}(x_2 - x_1)^2.$$

Искаме да докажем, че $f(x_2) - f(x_1) \geqq 0$. Да допуснем противното, т. е. че

$$f(x_2) - f(x_1) < 0.$$

Това ни дава

$$2^n \leqq \frac{A(x_2 - x_1)^2}{f(x_1) - f(x_2)}.$$

От друга страна, имаме $2^n > n$ и следователно

$$n \leqq \frac{A(x_2 - x_1)^2}{f(x_1) - f(x_2)}.$$

По такъв начин ние намерихме една горна граница на съвкупността от целите положителни числа, което противоречи на аксиомата на Архимед. С това доказателството е завършено.